राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद
तेलंगाणा, हैदराबाद

तेलंगाणा सरकार द्वारा निशुल्क वितरण

गणित

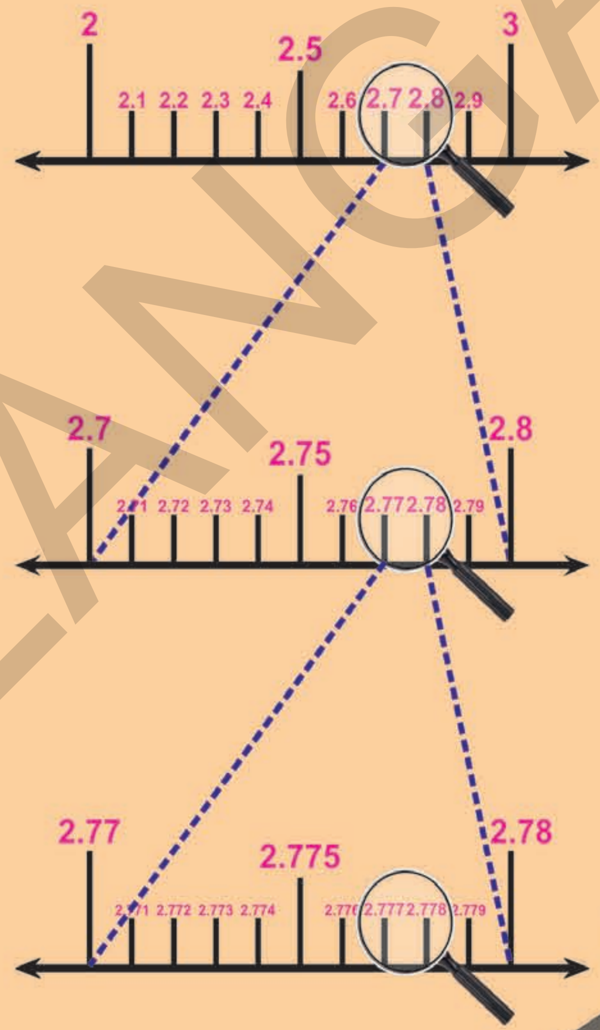
कक्षा - IX

FREE

गणित

कक्षा -IX

Mathematics
Class - IX
(Hindi Medium)



तेलंगाणा सरकार द्वारा प्रकाशित
हैदराबाद

तेलंगाणा सरकार द्वारा निशुल्क वितरण

बच्चों ! ये सूचनायें आपके लिये

1. प्रत्येक अवधारणा को समझने के लिये, उचित चित्र के साथ एक वास्तविक जीवन प्रसंग पाठ्यपुस्तक में दिया गया हैं। चित्र की टिप्पणियों के साथ, संदर्भ के इच्छुक, पढ़ने के माध्यम से, अवधारणा को समझने का प्रयास करें ।
2. गतिविधियों की अवधारणाओं को समझते समय कुछ संदेह उत्पन्न हो सकते हैं । इनको अपने मित्रों और शिक्षकों के साथ चर्चा के माध्यम से उन संदेहों को स्पष्ट करें और बिना कोई शंका के गणितीय अनवधारणाओं को समझें।
3. " इन्हें कीजिये " अभ्यास स्वयं प्रयत्न के लिये दिया जाता है जिससे यह ज्ञात हो कि अवधारण्य आपको कहाँ तक समझमें आई हैं । यदि आप इन अभ्यासों की समस्याओं को हल करने में कोई कठिनाई का सामना कर रहे हैं, तो आप अपने शिक्षक के साथ चर्चा करके उन्हें स्पष्ट करें ।
4. " प्रयास कीजिये" में दी गई समस्याओं को रचनात्मक और बड़े पैमाने पर सोच कर, तर्क के द्वारा हल किया जा सकता है । यदि आप इन समस्याओं को हल करने में कठिनाई का सामना करते हैं, तो आप अपने मित्रों और शिक्षकों की सहायता ले सकते हैं ।
5. " सोचिये और चर्चा कीजिये " में दी गई कार्यविधियाँ, या गतिविधियाँ, गंभीर सोच की अवधारणा की व्यापकता को समझने के लिये दिये गये हैं । इन गतिविधियों को अपने साथी छात्रों और शिक्षकों के साथ चर्चा द्वारा हल किया जाना चाहिये ।
6. अध्याय में चर्चा की गई–विभिन्न अवधारणाओं के साथ समस्याओं के विभिन्न प्रकार के अवधारणा/अध्याय के अंत में दिये गये अभ्यास में हैं । विद्यालय में, घर में या अवकाश के समय में अपने आप इन समस्याओं को हल करने का प्रयास करें ।
7. अभ्यास "प्रयत्न कीजिये/प्रयास कीजिये" का उद्देश्य केवल कक्षा में, स्वयं शिक्षक की उपस्थिति में समस्याओं को हल करने के लिये है ।
8. जहाँ भी पाठ्यपुस्तक में दिया जाता है "परियोजना कार्य" आप उसे समूहों में आचरण करना चाहिये, लेकिन परियोजना के निर्माण की रिपोर्ट को व्यक्तिगत रूप से प्रस्तुत करना चाहिये ।
9. उक्त दिन गृहकार्य के रूप में दी गई समस्याओं को हल करने का प्रयास करें । अपने संदेहों को स्पष्ट करें और अपने शिक्षकों के साथ विचार विमर्श करने के पश्चात उसी दिन उसका सुधार करें ।
10. अधिक समस्याओं को इकट्ठाकर, सीखी गई अवधारणाओं पर नई समस्याएँ बनाये और उन्हें अपने साथी शिक्षकों और सहपाठियों दिखाने को प्रयास करें ।
11. अनेक पहेली, खेल और गणितीय अवधारणाओं से संबंधित रोचक बातें इकट्ठा करें और अपने मित्रों और शिक्षकों के साथ चर्चा या विचार करने का प्रयास करें ।
12. केवल कक्षा के लिये गणितीय अवधारणाओं को सीमित न रखें । कक्षा के बाहर अपने परिवेश के साथ उन्हें संबंधित करने का प्रयास करें ।
13. छात्र, समस्याओं का समाधान और कारण दें, और सिद्ध करें, गणितीय संवाद करने में सक्षम हों, अधिक अवधारणाओं को समझने,संवाद करने में सक्षम हों, अधिक अवधारणाओं को समझने और समस्याओं और गणितीय अध्ययन में प्रतिनिध्व करने के लिये, सक्षम हल करने के लिये अवधारणाओं के साथ संबंध बनाये रखें।

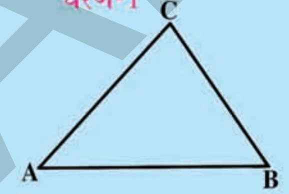
''सफलता की शुभकामनायें''

अद्भुत वृत्त
त्रिभुज का नौ-बिन्दु वृत्त निर्माण

वृत्त जो लम्ब के तल से गुजरता है, जिसे एक भुजा से सम्मुख शिर्ष पर डाला जाता है। वह भुजाओं के मध्य बिन्दु से तथा वृत्तखण्ड के मध्यबिन्दु से गुजरती है वह लम्बों के कटान बिन्दुओं को जोड़ती है।

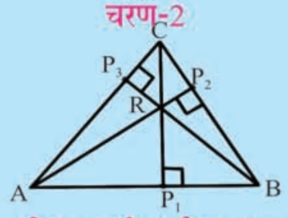
क्या आप जानते है? इसे नौ-बिन्दु वृत्त कहते है। यह नौ बिन्दु वृत्त की जानकारी 1765, में लियोनार्ड युलर (Leonard Euler) ने दी है। लेकिन उसे जर्मनी गणितज्ञ कार्ल फियोरबॉक (Karl Feuerbach) ने 1882 में उसे पुर्नखोज की।

चरण-1



एक कागज पर विषमबिन्दु त्रिभुज का निर्माण कर ABC नामांकित कीजिए।

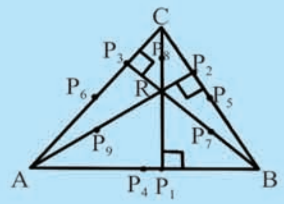
चरण-2



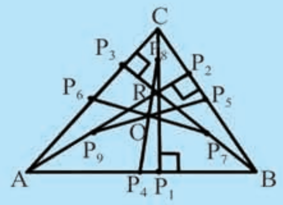
त्रिभुज की प्रत्येक भुजा के लम्ब डालिए मानलो वे भुजाओं को P_1, P_2, P_3 पर स्पर्श करती है। लम्ब केन्द्र R अंकित कीजिए।

चरण-3

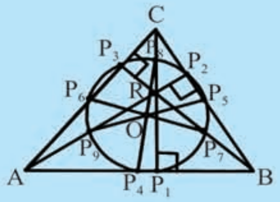
प्रत्येक भुजा की मध्य बिन्दु ज्ञात करो उन्हें P_4, P_5, P_6 से नामांकित कीजिए।



तथा के मध्य बिन्दु डालिए उन्हें P_7, P_8 तथा P_9 नाम दीजिए।



P_4 से P_5 को मिलाने वाली रेखा खींचिए। उसी प्रकार P_5 से P_9 तथा P_6 से P_7 को मिलाइए उनके प्रतिच्छेदन को O नाम दीजिए।



OP1 त्रिज्या से वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O होगा। वह सभी 9 बिन्दु $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ तथा P_9 से गुजरना चाहिए।

यह एक अद्भुत वृत्त बनेगा। आपने देखा कि ज्यामितीय रचना में 'प्रकार' का महत्वपूर्ण स्थान है।

गणित
कक्षा - 9

MATHEMATICS
CLASS - IX
(Hindi Medium)

पाठ्यपुस्तक निर्माण एवं प्रकाशन समिति

मुख्य उत्पादन अधिकारी : **श्री ए. सत्यनारायण रेड्डी**
निदेशक,
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद,
हैदराबाद।

मुख्य कार्यकारी संयोजक : **श्री बी. सुधाकर**
निदेशक,
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद,
हैदराबाद।

कार्यकारी संयोजक : **डॉ. एन. उपेंदर रेड्डी**
अध्यक्ष,
पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तक विभाग,
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद,
हैदराबाद।

तेलंगाणा सरकार द्वारा प्रकाशित, हैदराबाद

विद्या से बढ़ें। **क़ानून का आदर करें।**
विनय से रहें। **अधिकार प्राप्त करें।**

First Published 2013
New Impressions 2014, 2015, 2017,2018, 2019,2020

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Telangana Government 2020-21

Printed in India
at Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

— o —

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

गणित आधार पत्र, पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तक निर्माण प्रमुख

प्रो. वी. कन्नन, अध्यक्ष, गणित एवं सांख्यिकीशास्त्र विभाग, हैदराबाद विश्वविद्यालय।

मुख्य सलाहकार

श्री चुक्का रामय्या, शिक्षाविद, हैदराबाद।

डॉ. एच. के. दीवान, शिक्षा सलहाहकार, विद्या भवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान।

लेखक गण

श्री वेंकट राम कुमार, एच.एम., जेड.पी.पी.एच.एस. मुलुमुडि, नेल्लूर

श्री गोट्टुमुक्कला वी.बी.एस.एन. राजु, एस.ए., म्यूनिसिपल हाई स्कूल कस्पा, विजयनगरम।

श्री सोम प्रसाद बाबु, पी.जी.टी.,ए.पी.टी.डबल्यू.आर.एस., चंद्रशेखरपुरम, नेल्लूर

श्री के. वरदा सुंदर रेड्डी, एस.ए., जेड.पी.पी.एच.एस. तक्कसिला, आलमपुर, मबहूब नगर।

श्री कोमनदूरि मुरली श्रीनिवास, पी.जी.टी., ए.पी.टी.डबल्यू.आर.एस. स्कूल ऑफ एक्सिलेंस, श्रीशैलम।

श्री अब्बराजु किशोर, एस.जी.टी., एम.पी.यू.पी.एस. चमल्लमुडि, गुंटूर।

श्री पडाला सुरेश कुमार, एस.ए., जी.एच.एस. विजयनगर कालोनी, हैदराबाद।

श्री जी. अनंत रेड्डी, सेवानिवृत्त एच.एम., रंगा रेड्डी।

श्री पी.डी.एल. गनपति शर्मा, एस.ए., जी.एच.एस. ज़मिस्तानपुर, माणिकेश्वर नगर, हैदराबाद।

श्री एम. रामांजनेयुलु, प्रवक्ता, डी.आई.ई.टी.विकाराबाद, रंगा रेड्डी।

श्री एम. दुग्गराजु वेणु, एस.ए., यू.पी.एस. अल्लावाडा, चेवेल्ला, रंगा रेड्डी।

श्री एम. रामा चारी, प्रवक्ता, डी.आई.ई.टी.विकाराबाद, रंगा रेड्डी।

श्री. पी. एंथनी रेड्डी, एच.एम. सेंट पीटर्स हाई स्कूल, आर.एन.पेट, नेल्लूर।

डॉ. ए. रामबाबु, प्रवक्ता, सरकारी सी.टी.ई. वरंगल।

श्री. पी. मनोहर, एस.ए., जेड.पी.एच.एस. ब्राह्मणपल्ली, तद्वाई, निज़ामाबाद।

डॉ. पूंड्ला रमेश, प्रवक्ता, सरकारी आई.ए.एस.ई., नेल्लूर।

समन्वयक

श्री काकुलवरम राजेंदर रेड्डी, समन्वयक, गणित पाठ्यपुस्तक, एस.सी.ई.आर.टी., हैदराबाद।

श्री वेंकट राम कुमार, एच.एम., जेड.पी.पी.एच.एस. मुलुमुडि, नेल्लूर

हिंदी अनुवाद संपादक

श्रीमती एस. पद्मा, सेवानिवृत्त प्रवक्ता, हिंदी महाविद्यालय, नल्लाकुंटा, हैदराबाद।

हिंदी अनुवाद समन्वयक

डॉ. राजीव कुमार सिंह, यू.पी.एस., याडारम, मेड्चल, रंगारेड्डी.

हिंदी अनुवादक समूह

डॉ. राजीव कुमार सिंह, यू.पी.एस., याडारम, मेड्चल, रंगारेड्डी.

श्रीमती रंजना, प्रधानाध्यापिका, नवजीवन बालिका विद्यालय, रामकोटी, हैदराबाद।

श्रीमती पुष्पलता, प्रिंसीपल, टी.एस. एम.एस., वेलदंडा, नागरकर्नुल

श्रीमती उमा निकम, एल.एम.जी.हाई स्कूल, बेगम बाज़ार, हैदराबाद।

श्रीमती अफ़रोज जबीन, प्रधानाध्यापिका, प्राथमिक स्तर, नवजीवन बालिका विद्यालय, रामकोटी, हैदराबाद।

श्रीमती उषा मेहरा, सेवानिवृत्त अध्यापिका, श्री गुजराती विद्या मंदिर हाई स्कूल, कोठी, हैदराबाद।

श्री ए. रामचंद्रय्या, एस.ए., ज़ेड.पी.एच.एस. रामपल्ली, कीसरा, रंगारेड्डी।

संपादक

डॉ. एस. सुरेश बाबु, प्रोफेसर, एस.सी.ई.आर.टी. हैदराबाद।

डॉ.जी.एस.एन.मूर्ति, रीडर, राजह आर.एस.आर.ख.आर.आर. कॉलेज, बोब्बिली, विजयनगरम।

प्रो. एन. सीएच. पट्टाभि रामाचार्युलु, (सेवानिवृत्त) नेशनल इंस्टिट्यूट ऑफ टेक्नालजी, वरंगल।

प्रो. वी. शिव रामप्रसाद, (सेवानिवृत्त), गणित विभाग, उस्मानिया विश्वविद्यालय, हैदराबाद।

श्री ए. पद्मनाभन, (सेवानिवृत्त), अध्यक्ष, गणित विभाग, महारानी कॉलेज, पद्दापुरम। प्रवक्ता, एस.सी.ई.आर.टी., हैदराबाद।

श्री के ब्रह्मय्या, सेवानिवृत्त प्रोफेसर, एस.सी.ई.आर.टी., हैदराबाद।

शैक्षिक सहायक समूह सदस्य

श्री इंदर मोहन, **श्री यशवंत कुमा दवे,**
श्री हमीफ पलिवाल, **श्री आशिश चोर्डिया,**
विद्या भवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान।

श्री शरण गोपाल, कुमारी एम.अर्चना, श्री पी.चिरंजीवी, गणित एवं सांख्यिकीशास्त्र विभाग, हैदराबाद विश्वविद्यालय।

श्रीमती नीरजा, जी.पी.एस., सी.पी.एल., अंबरपेट, हैदराबाद।

चित्रकार एवं डिज़ाइन समूह

श्री प्रशांत सोनी, एसके.शकीर अहमद, एस.एम. इकराम, विद्या भवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान।

आमुख

शिक्षण मानव प्रबोधन और सशक्तीकरण की प्रक्रिया है। शिक्षण की इस विशाल क्षमता को ध्यान में रखते हुए सभी प्रगतिशील सामाजिक तत्वों ने इसके वैश्वीकरण तथा सबके लिए गुणवत्तापूर्ण शिक्षा प्रदान करने का निश्चय किया है। फलस्वरूप माध्यमिक शिक्षा के वैश्वीकरण में तीव्रता आई है।

माध्यमिक स्तर पर, प्राथमिक स्तर की शिक्षा द्वारा सीखे गये गणितीय ज्ञान की समृद्धता की अनुशासित शुरुआत होती है। तार्किक भावनाओं, प्रमेयों आदि को इस स्तर पर परिचय कराया जाता है। साथ ही साथ गणित एक विशिष्ट विषय होने के साथ अन्य विषयों के अंतर्गत तार्किक विश्लेषण में भी सहायक होता है।

मुझे विश्वास है कि आंध्र प्रदेश के इस स्तर के छात्र, इस पाठ्यपुस्तक को पढ़कर गणित का आनंद लेंगे, अपने दैनिक जीवन के अनुभवों और समस्याओं में गणित का उपयोग कर सकेंगे, गणित की मूल भावनाओं व संरचनाओं को समझ सकेंगे।

अध्यापकों के लिए पाठ्यक्रम व शिक्षण संबंधी दृष्टिकोण के समीक्षात्मक अंशों को समझना और आत्मसात करना, साथ ही गुणात्मक शिक्षण पर ध्यान देना आज की विशेष आवश्यकता है। इसके लिए कक्षा में समावेशी व सहयोगपूर्ण माहौल की आवश्यकता है ताकि शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया को प्रभावी बनाया जा सके। सकारात्मक कक्षाकक्ष वातावरण का निर्माण एक ऐसी शक्ति है जिसके माध्यम से बच्चों के रहन-सहन को संस्कारित एवं प्रभावित किया जा सकता है।

ए.पी.एस.सी.एफ.-2011 में गणित आधार पत्र के सिद्धांतों की विस्तारपूर्वक प्रस्तुति है। साथ ही साथ कक्षागत पाठ्यक्रम और शैक्षिक मापदंड निर्दिष्ट हैं। इन सबको पाठ्यपुस्तक बनाते समय ध्यान में रखा गया है। पाठ्यपुस्तक निर्माण के समय संवेदनशील मुद्दों के प्रति विशेष सावधानी बरती गई है।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, पाठ्यपुस्तक निर्माण में सहयोग देने वाली पााठ्यपुस्तक निर्माण समिति, राष्ट्रीय स्तर के विषय विशेषज्ञ, विश्वविद्यालय आचार्य, शिक्षाविद्, लेखकगण, चित्रकार, प्रकाशन विभाग आदि के प्रति कृतज्ञतापूर्ण धन्यवाद अर्पित करती है। साथ ही साथ परिषद, पाठशाला शिक्षा विभाग, जिला शिक्षा अधिकारी, मंडल शिक्षा अधिकारी, प्रधानाध्यापक, अध्यापक एवं उन सभी लोगों को धन्यवाद देती है जिनका सहयोग इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण में प्रत्यक्ष एवं परोक्ष रूप से प्राप्त हुआ है। पाठ्यपुस्तक की गुणवत्ता में सुधार हेतु राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, आंध्र प्रदेश, हैदराबाद आपके सुझावों का स्वागत करेगी।

स्थान : हैदराबाद
दिनांक: 03.12.2012

निदेशक
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद
तेलंगाणा, हैदराबाद

प्राक्कथन

तेलगाणा सरकार ने आंध्र प्रदेश राज्य पाठ्यचर्या की रूपरेखा (TSSCF - 2011) के आधार पर तेलगाणा के पाठ्यक्रम में संशोधन का निर्णय लिया है जो बच्चों की पाठशाला और बाहरी जीवन को जोड़ने पर बल देती है। शिक्षा का अधिकार अधिनियम (RTE - 2009) यह कहता है कि प्रत्येक बच्चा जो पाठशाला में प्रवेश करता है, 14 वर्ष की आयु तक प्रत्येक स्तर के लिए निर्धारित अपेक्षित दक्षताओं की प्राप्ति करे। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (NCF- 2005) द्वारा प्रस्तावित सुझावों को विशेष कर हमने माध्यमिक स्तर पर गणित और विज्ञान में प्रमुखता दी है जिससे हमारे विद्यार्थियों में इन विषयों से संबंधित मजबूत आधारशिला रखी जा सके।

किसी राष्ट्र की शक्ति उसकी वचनबद्धता और क्षमता पर आधारित होती है जो उसके लोगों की आवश्यकताओं, आकांक्षाओं और सुविधाओं की प्राप्ति के लिए एक प्रगतिशील प्रौद्योगिकीय समाज का निर्माण कर सके।

गणित के पाठ्यक्रम को संरचनागत एवं समावेशी आधार पर तीन स्तरों में विभाजित किया गया है, वे हैं-प्राथमिक, उच्च प्राथमिक और माध्यमिक। माध्यमिक स्तर के गणित अध्यापकों को कक्षा 8 से 10 तक के पाठ्यक्रम को बृहत एवं गहराई से समझने के लिए उन गणित की संकल्पनाओं के अध्ययन की आवश्यकता है जो बच्चों ने प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर सीखी हैं।

यह पाठ्यक्रम संरचनात्मक दृष्टिकोण, अन्वेषणात्मक प्रविधि और गणितीय मूल संकल्पनाओं व उनके सामान्यीकरण पर आधारित है। यह प्रविधि बच्चों को कक्षाकक्ष प्रक्रिया में उत्साह के साथ भाग लेने और चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित करती है।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक टी.एस.एस.सी.ई.आर.टी. द्वारा प्रस्तावित पाठ्यक्रम की रूपरेखा और अपेक्षित दक्षताओं के मिश्रण एवं संशोधन के आधार पर बनाई गई है।

- पूरे पाठ्यक्रम को मुख्य रूप से छः भागों में विभाजित किया है- (1) अंक व्यवस्था, (2) बीजगणित, (3) अंक गणित, (4) ज्यामिति, (5) क्षेत्रमिति और (6) आँकड़ों का प्रबंधन। क्षेत्रफल से संबंधित बिंदुओं के शिक्षण द्वारा हम अपेक्षित दक्षताओं में निहित कौशलों जैसे, समस्या समाधान, तार्किक चिंतन, गणितीय संचार, प्रदत्तों का विविध रूपों में प्रस्तुतीकरण, अध्ययन में गणितीय सिद्धांतों को अपनाना और इनका दैनिक जीवन में उपयोग करना आदि का विकास किया जा सकता है।

  पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों को मनन करने के अवसर प्रदान करने पर बल दिया गया है। इसमें छोटे समूहों में चर्चा करने संबंधी क्रियाकलाप दिये गये हैं। साथ ही 'इसे कीजिए' और 'प्रयत्न कीजिए' जैसे क्रियाकलाप, उनके अनुभव का गणित में उपयोग करने पर बल देते हैं। अध्यापक को कक्षाकक्ष में इन क्रियाकलापों के आयोजन के लिए आवश्यक कदम उठाने चाहिए।

इस पाठ्यपुस्तक के कुछ विशेष गुण निम्नलिखित हैं-

- अध्यायों को इस प्रकार से विविधता प्रदान करते हुए व्यवस्थित किया गया है जिससे छात्र संपूर्ण पाठ्यक्रम के प्रत्येक भाग के अध्ययन में रुचि ले सकें।
- उच्च प्राथमिक स्तर पर ज्यामितीय संकल्पनाओं को मापन और कागजों को मोड़ने जैसे क्रियाकलापों के माध्यम समझाया गया था। अब हम स्वयंसिद्ध करने की पद्धति को अपना रहे हैं। अनेक बार हमने रचना बनाकर, गणितीय संकल्पनाओं को समझा व परिभाषित किया है। इन परिभाषित व अपरिभाषित संकल्पनाओं को समझना व उनके बीच के संबंध जानना, हम इस स्तर पर सीखेंगे। तार्किक ढंग से किसी निष्कर्ष पर पहुँचना प्रमेय कहलाता है। विशेष बात यह है कि प्रत्येक प्रमेय को समझने व सिद्ध करने के लिए आरंभ में संबंधित क्रियाकलाप दिये गये हैं।
- सतत समग्र मूल्यांकन प्रक्रिया को '**प्रयत्न कीजिए**'और '**सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए**' जैसी क्रियाओं के माध्यम से इसमें समावेशित करने का प्रयास किया गया है। अध्यायों के अंतर्गत आने वाली प्रत्येक संकल्पना के बाद अभ्यास दिये गये हैं जिससे अध्यापक आकलन कर सके कि बच्चा अध्याय का कौनसा भाग, कितनी सीमा तक समझने में सफल हुआ है।
- संपूर्ण पाठ्यक्रम को 15 अध्यायों में विभाजित किया गया है जिससे बच्चे प्रत्येक संकल्पना से संबंधित अंशों की वस्तुनिष्ठता से परिचित हो सकें और गणित सीखने की प्रक्रिया में आनंद का अनुभव करें।
- रंगीन चित्र, आकृतियाँ, पढ़ने लायक मुद्रित अक्षरों के आकार निश्चित रूप से बच्चों को अपनी ओर आकर्षित करेंगे और वे इस पाठ्यपुस्तक की विषयवस्तु को भलीभाँति समझने में सहायक होंगे।

अध्याय (1) : वास्तविक संख्याएँ समझने के लिए अंक व्यवस्था के विविध व्यवस्थाओं का परिचय दिया गया है जिससे छात्र अनुमान लगा सकें कि भिन्न, परिमेय संख्याओं से किस प्रकार भिन्न होते हैं? रचनात्मक उदाहरणों के माध्यम से परिमेय संख्याओं के लक्षणों की चर्चा की गई है। बच्चे परिमेय संख्याओं व दशमलव संख्याओं को संख्यारेखा पर प्रदर्शित करना इस कक्षा में सीखेंगे।

अध्याय (2) बहुपद एवं गुणनखंडन के अंतर्गत हम एक पदीय एवं बहुपदीय के भेद को बीजगणितीय व्यंजकों के माध्यम से जानेंगे। बहुपदीय का गुणनखंडन शेष एवं गुणनखंड प्रमेय के माध्यम से सिखाया गया है। बहुपदी व्यंजकों का गुणनखंडन उसके मध्य के पद को वितरित करके करने की प्रविधि यहाँ बताई गई है। हमने कुछ विशिष्ट बहुपदों में गुणनखंडन के तरीकों की भी चर्चा की है। बच्चों को अपनी ओर से गुणनखंडन की अनेक विधियों को अपनाने के लिए प्रेरित कीजिए।

अध्याय (3) दो चर राशि वाले समीकरण के अंतर्गत बच्चों को उदाहरणों के माध्यम से इस संकल्पना से संबंधित अनेक खोज करने के लिए प्रेरित किया गया है जिससे वे इन संकल्पनाओं का अपने दैनिक जीवन में प्रयोग कर सकें।

इस पुस्तक में ज्यामिति से संबंधित सात अध्याय (3 ,4,7,8,11,12, और 13) हैं। इन सभी अध्यायों में ज्यामिति का शिक्षण तार्किकता, आगमन विधि से संकल्पना समझना और इसके भाव को व्यक्तिगत रूप से समझने का मौका दिया गया है। इनसे संचार एवं समस्या समाधान में सहायता मिलेगी और वे अनेक समतल आकारों से इन संकल्पनाओं का संबंध जोड़ समझ सकेंगे। ज्यामिति संबंधी ऐतिहासिक परिदृश्य को भी इन अध्यायों में बताया गया है इसमें युक्लिद की संकल्पनाओं की ज्यामिति के विकास में सहयोग पर भी इनमें चर्चा की गई है। इनमें अनेक क्रियाकलाप एवं प्रमेय कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त और क्षेत्रफल से संबंधित दिये गये हैं। इसके माध्यम से आगमन, निगमन, विश्लेषणात्मक चिंतन और तार्किक चिंतन से विकास करने का उद्द्देश्य रहा है। ज्यामितीय आकारों के निर्माण रचनाओं के माध्यम से कंपास द्वारा आकृति निर्माण के अनेक क्रियाकलाप दिये गये हैं।

अध्याय (5) निर्देशांक ज्यामिति में युक्लिद की ज्यामितीय संकल्पना के वैकल्पिक परिदृश्य को निर्देशांकों एवं बीजगणित से सहसबंध स्थापित करते हुए दर्शाया गया है। अनेक समतल आकारों व आलेखों के उदाहरणों से इसकी व्यापक जानकारी दी गई है।

अध्याय (9) सांखियिकी में इसके महत्व, विविध प्रदत्तों का संकलन (समूहबद्ध एवं असमूहबद्ध) के उदाहरण दिये गये हैं। साथ ही दैनिक जीवन के उदाहरण से माध्य, माध्यिका, मध्यमान ज्ञात करना सिखाया गया है।

अध्याय (14) प्रायिकता माध्यमिक स्तर पर पहली बार पाठ्यक्रम में रखा गया है जिसमें अनेक क्षेत्रों के उदाहरण द्वारा उनसे संबंधित संभावनाओं का अनुमान लगाना सिखाया गया है। इसमें मिश्र अनुपात की समस्याएँ अनेक दैनिक जीवन के संदर्भों से ली गई हैं।

अध्याय (10) पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन में, हम वक्राकार समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल, किसी बेलन, शंकु और गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं उनके आयतन ज्ञात करने संबंधी चर्चा है। इसमें किसी ठोस वस्तु के आयतन से संबंध एवं उन्हें ज्ञात करने के सूत्र की खोज करने संबंधी चर्चा भी की गई है।

अध्याय (15) गणित में उपपत्तियाँ, छात्रों को गणितीय कथनों को समझने और विविध परिस्थितियों में उन्हें सिद्ध करने व समझने में सहायक होगा। हमने इसमें स्वयंसिद्ध, अभिग्रहित, अभिधारणाएँ और विविध उदाहरणों द्वारा अनेक प्रमेयों को सिद्ध करने के सोपानों की चर्चा की है।

मात्र अच्छी पाठ्यपुस्तक के निर्माण से गुणवत्तापूर्ण शिक्षा की गारंटी नहीं दी जा सकती, इसके लिए अध्यापकों द्वारा इसे पाठ्यपुस्तक में दिये निर्देशों के अनुसार पढ़ाया जाना भी ज़रूरी है। क्रियाकलापों को कराते समय शिक्षार्थियों की सहभागिता एवं प्रतिभागिता के माध्यम से उनकी समझ के प्रति आश्वस्त हुआ जा सकता है।

इस प्रकार अध्यापकों से यह आशा की जाती है कि वे कक्षाकक्ष में समस्या समाधानों एवं अभ्यास की प्रक्रिया को एक प्रतिमान के रूप में प्रस्तुत करेंगे जिससे छात्र गणितीय संकल्पनाओं को भलीभाँति समझ सकें तथा भावी परिस्थितियों में उनका प्रयोग कर सकें।

“बचपन की अद्‌भूत खोंजे”

एक छोटा सा बालक रामानुजन एक महान गणितज्ञ कैसे बना?

रामानुजन

श्रीनिवास रामानुजन एक ऐसे व्यक्ति थे जिन्होंने कभी नया सिखने की प्रवृत्ति को नहीं छोड़ा। छोटी सी आयु में ही उन्होंने अनपे सहपाठियों, अग्रजों तथा अध्यापकों को अपनी प्रतिभा से प्रभावित किया था।

$$3 = \sqrt{9} = \sqrt{1+8}$$
$$= \sqrt{1+(2\times 4)}$$
$$= \sqrt{1+2\sqrt{16}}$$
$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+15}}$$
$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+(3\times 5)}}$$

इस प्रकार.....

एक बार अंकगणित की कक्षा में अध्यापक ने बताया कि तीन केलों को यदि तीन विद्यार्थियों में बाँटा जाय तो प्रत्येक को एक केला प्राप्त होगा। तब रामानुजन ने प्रश्न किया कि ‘‘सर यदि कोई केला न बाँटा गया तो भी क्या उन्हें एक-एक केला प्राप्त होगा?’’

$$\frac{1}{4}+2=\left(1\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3)=\left(2\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5)=\left(5\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5\times 7)=\left(14\frac{1}{2}\right)^2$$

..... आदि

रामानुजन की गणितीय क्षमता ने उनके साथ कोई मित्रों को जोड़ा एक बार अनेक सिनियर विद्यार्थी ने प्रश्न किया कि ‘‘यदि $\sqrt{x}+y=7$ तथा $x+\sqrt{y}=11$, हो तो x और y’’ के मूल्य क्या होंगे?’’ तुरंत ही रामानुजन ने उत्तर दिया $x=9$ तथा $y=4$ होगा तब से वह विद्यार्थी रामानुजन का मित्र बन गया।

अपने विद्यार्थी जीवन में रामानुजन अपने गृह कार्य के साथ कुछ नयें विधियों को अपनी इच्छा से तैयार करते थे।

श्रीनिवास अयंगर रामानुजन भारत के महान, प्रशंसनीय गणित विद्वान है। उनका जन्म 22 दिसम्बर 1887 को तमिलनाडु के एरोड़ा गाँव में एक गरीब परिवार में हुआ था। 13 वर्ष की आयु में स्वबुद्धि से उन्हों ‘‘लोनी के त्रिकोणमिति’’ पर प्रसिद्धि प्राप्त की। 15 वर्ष की आयु में उनके एक सिनियर मित्र ने ‘‘एलीमेन्ट्री रिझल्ट इन प्युर ॲण्ड अप्लाइड़ मैथेमाटिक्स बाय जॉर्जकार’’ का सार उन्हें दिया। वे जब कागजों पर विचार लिखने लगे उसमें बनी पुस्तक आज के नाम से प्रसिद्ध है। यद्यपि उनके पास कोई उपाधि नहीं थी फिर भी मद्रास विश्वविद्यालय ने उनके लिए 1913 में रु.75 मासिक छात्रवृत्ति के रूप में देने का निर्णय किया। उन्होंने महान गणितज्ञ G.H. Hardy (Combridge विश्वविद्यालय) लंदन को 120 प्रमेयों एवं सूत्रों को भेजा। उनकी क्षमता का आमंत्रण दिया। उन्होंने हार्ण्डी एवं अन्य गणितज्ञों के साथ काम किया संख्याओं के अंकिय सिद्धान्त को प्रस्तुत किया। जिसमें संख्याओं का वृत्तिय सिद्धान्त, बिजगणितीय वीषमताएँ, दीर्घवृत्तीय फलन आदि निहित है। वे ऐसे दूसरे भारतीय को जिन्हें 1918 में रॉयल सोसायटी का सदस्य चुना गया। वे ट्रिनिटी कामब्रेज के पहले भारतीय सदस्य बने। अपनी अस्वस्थता के दौरान भी उन्होंने संख्याओं के बारे में चिंतन करना नहीं छोड़ा। उन्होंने हार्डी के टैक्सी के नंबर 1729 को एक विशिष्ट संख्या का दर्जा दिया। वह न्यूनतम से दर्शा सकते है $1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$। दुर्भाग्यवश क्षय व्याधि से 26 अप्रैल 1920 को उनका देहान्त और 2012 को उनके 125 वे जन्म दिवस को गणितीय वर्ष के रूप में घोषित किया गया है।

राष्ट्र-गान

- रवींद्रनाथ टैगोर

जन-गण-मन अधिनायक जय हे!
भारत भाग्य विधाता।
पंजाब, सिंध, गुजरात, मराठा,
द्राविड़, उत्कल बंग।
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा
उच्छल जलधि-तरंग।
तव शुभ नामे जागे।
तव शुभ आशिष मांगे,
गाहे तव जय गाथा!
जन-गण-मंगलदायक जय हे!
भारत-भाग्य-विधाता।
जय हे! जय हे! जय हे!
जय, जय, जय, जय हे!

प्रतिज्ञा

- पैडिमर्रि वेंकट सुब्बाराव

भारत मेरा देश है और समस्त भारतीय मेरे भाई-बहन हैं। मैं अपने देश से प्रेम करता हूँ और इससे प्राप्त विशाल एवं विविध ज्ञान-भंडार पर मुझे गर्व है। मैं सर्वदा इस देश एवं इसके ज्ञान-भंडार के अनुरूप बनने का प्रयास करूँगा। मैं अपने माता-पिता और अध्यापकों तथा समस्त गुरुजनों का आदर करूँगा और प्रत्येक व्यक्ति के प्रति नम्रतापूर्वक व्यवहार करूँगा। मैं जीव-जंतुओं से भी प्रेमपूर्वक व्यवहार करूँगा। मैं अपने देश और उसकी जनता के प्रति अपनी भक्ति की शपथ लेता हूँ। उनके मंगल एवं समृद्धि में ही मेरा सुख निहित है।

वास्तविक संख्याएँ (REAL NUMBERS)

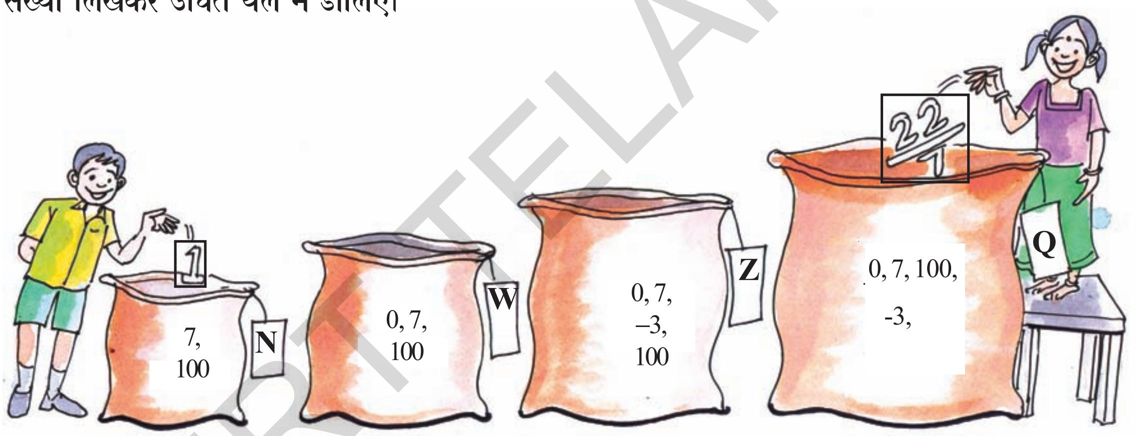
01

1.1 प्रस्तावना

सर्वप्रथम हम सभी सँख्याओं का अवलोकन करेंगे। निम्न संख्याओं को जाँचेंगे।

$$7, 100, 9, 11, -3, 0, -\frac{1}{4}, 5, 1, \frac{3}{7}, -1, 0.12, -\frac{13}{17}, 13.222\ldots, 19, \frac{-5}{3}, \frac{213}{4}, \frac{-69}{1}, \frac{22}{7}, 5.\overline{6}$$

जॉन और स्नेहा संख्याओं को उचित बैग में डालना चाहते हैं। कुछ संख्याएँ उन बैगों में है......शेष सभी संख्याओं को उनके उचित बैगों में डालिए। यदि एक संख्या एक से अधिक थैले में जाती है तो वह संख्या लिखकर उचित थैले में डालिए।



हमने देखा कि N थैले में प्राकृतिक संख्याएँ है। W थैले में पूर्ण संख्याएँ तथा Z थैले में पूर्णांक संख्याएँ और Q थैले में करणीय संख्याएँ है।

Z थैले में पूर्णांक संख्याएँ है जो ऋणात्मक एवं पूर्ण संख्याओं का समूह जिसे I या Z द्वारा दर्शाया जाता हैं।

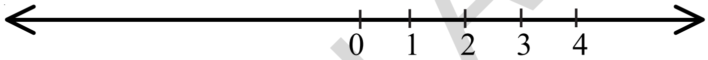
$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

उसी प्रकार Q थैले में $\frac{p}{q}$ रूप में आने वाले जहाँ p तथा q पूर्णांक संख्याएँ है तथा $q \neq 0$.

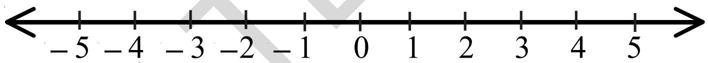
आपने देखा होगा प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक संख्याएँ, करणीय संख्याएँ जो $\frac{p}{q}$, रूप में लिखी जा सकती है जहाँ p और q पूर्णांक संख्याएँ है और $q \neq 0$.

उदाहरण, -15 को $\frac{-15}{1}$; की तरह भी लिखा जा सकता है। p = -15, q = 1. उदा. देखिए.
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{50}{100}$ ... यह आपस में समान करणीय संख्याएँ (भिन्न) है। अर्थात् सभी करणीय संख्याओं का अद्वितीय प्रदर्शन $\frac{p}{q}$ रूप में नहीं होता है। जहाँ p और q पूर्ण संख्याएँ है और $q \neq 0$. जब हम कहते हैं कि $\frac{p}{q}$ करणीय संख्याएँ है तथा को संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है तो $q \neq 0$ तथा p और q के उभयनिष्ठ खण्ड एक के अलावा दूसरे नहीं होंगे ।(p और q सापेक्ष रूढ़ संख्याएँ) के समान मुल्य वाले अनंत भिन्न होते है हम $\frac{1}{2}$ को चुनेंगे जो की, । इसे समझने के लिए संख्या रेखा उतारिए।सभी परिमेय संख्याओं के सामान्य रुप को दर्शाता है।

पूर्ण संख्या को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए एक रेखा खींचकर उस पर '0' बिन्दु दर्शाइए। समान दूरी पर दाई ओर 1, 2, 3, 4, … संख्याएँ दर्शाइए।

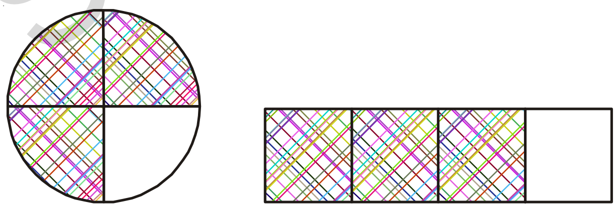


पूर्णांक संख्याओं की रेखा



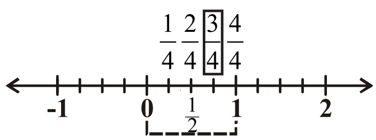
क्या आप जानते हैं करणीय संख्याओं को किस प्रकार संख्या रेखा पर दर्शाया जाता है।
सर्वप्रथम $\frac{3}{4}$ भिन्न को चित्र रूप में और संख्या रेखा पर दर्शाएँगे।
$\frac{3}{4}$ में 3 अंश और 4 हर है।
अर्थात् 4 समान भागों में से 3 भाग लिए जाएँगे।

यहाँ कुछ अंश $\frac{3}{4}$.



$\frac{3}{4}$ (Pictorially) $\frac{3}{4}$

चित्र रूप

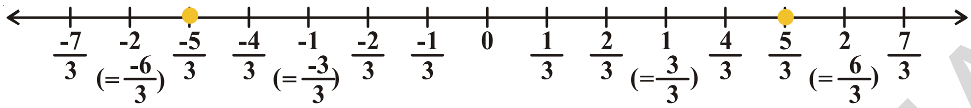


(Number line)

संख्या रेखा

उदाहरण-1. $\frac{5}{3}$ तथा $-\frac{5}{3}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

हल : $-2, -1, 0, 1, 2$ पूर्णांक संख्याओं को रेखा पर दर्शाइए।



प्रत्येक इकाई को तीन समान भागों में 0 के बाई तथा दाई ओर बाँटा गया है। इनमें से पाँच भागों को लिया गया। 0 के दाई ओर पाँचवा बिन्दु $\frac{5}{3}$ और बाई ओर का 5 वा बिन्दु $\frac{-5}{3}$ को दर्शाता है।

इसे कीजिए

1. $\frac{-3}{4}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।
2. 0, 7, 10, -4 को $\frac{p}{q}$ के रूप मे बताइए।
3. **इस संख्या का अनुमान लगाइए :** आपके मित्र ने 0 से 100 के बीच एक पूर्ण संख्या का चयन मस्तिष्क में किया हैं। उसे प्रश्न पूछकर उस संख्या को ज्ञात करना है। और आपका मित्र केवल हाँ या नहीं में उत्तर देगा। उसके लिए कौनसी युक्ति अपनाओगे।

उदाहरण-2. क्या निम्न कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए उदाहरण सहित कारण बताइए।

i. प्रत्येक करणीय संख्या पूर्णांक संख्या है।

ii. प्रत्येक पूर्णांक संख्या करणीय संख्या है।

iii. शून्य एक करणीय संख्या है।

हल : i. असत्य : उदा, $\frac{7}{8}$ करणीय संख्या है परन्तु पूर्णांक नहीं।

ii. सत्य : प्रत्येक पूर्णांक संख्या को $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ रूप में दर्शाया जा सकता है। उदा $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}$. (करणीय संख्या)

(कोई पूर्णांक संख्या 'b' को $\frac{b}{1}$ के रूप में दर्शाया जा सकता है)

iii. सत्य : 0 को $\frac{0}{2}, \frac{0}{7}, \frac{0}{13}$ के रूप में दर्शाया जा सकता है। ($\frac{p}{q}$ के रूप में p, q पूर्ण संख्याएँ है जहाँ $q \neq 0$)

('0' को $\frac{0}{x}$ के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। 'x' एक पूर्णांक संख्या है $x \neq 0$)

उदाहरण-3. 3 और 4 के मध्य आने वाली करणीय संख्याओं को मध्यमान विधि से ज्ञात कीजिए।

हल :

विधि-I : दो करणीय संख्याओं के मध्य आने वाली करणीय संख्या $\frac{a+b}{2}$ (a, b).

$$a = 3 \quad b = 4, \left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$\frac{(3+4)}{2} = \frac{7}{2}$. 3 और 4 के मध्य $3 < \frac{7}{2} < 4$

इस विधी से 3 के आगे और $\frac{7}{2}$ के मध्य करणीय संख्या

$$\frac{3+\frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{6+7}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{2\times 2} = \frac{13}{4}$$

$$3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < 4$$

विधि-II : दूसरी विधि द्वारा एक ही चरण में ज्ञात कर सकते हैं।
हमें दो संख्याएँ चाहिए 3, 4 को 2 + 1 = 3 हल के रूप में

i.e., $3 = \frac{3}{1} = \frac{9}{3}$ और $4 = \frac{4}{1} = \frac{12}{3}$

$\frac{10}{3}, \frac{11}{3}$ करणीय संख्याएँ है जो 3 और 4 के मध्य आती है।

$$3 = \frac{9}{3} < \left(\frac{10}{3} < \frac{11}{3}\right) < \frac{12}{3} = 4$$

यदि आपको 3 और 4 के मध्य 5 करणीय संख्याएँ, ज्ञात करना हो तो हम 3, 4 करणीय संख्या को 5 + 1 = 6 हर के रूप में लिखिए।

i.e. $3 = \frac{18}{6}$ और $4 = \frac{24}{6}$

$$3 = \frac{18}{6} < \left(\frac{19}{6}, \frac{20}{6}, \frac{21}{6}, \frac{22}{6}, \frac{23}{6}\right) < \frac{24}{6} = 4$$

इससे हम जान सकते हैं कि 3 और 4 के मध्य कई करणीय संख्याएँ होगी। दो अलग करणीय संख्याओं के लिए भी जाँच कीजिए। अतः हम कह सकते हैं कि दो करणीय संख्याओं के मध्य अनन्त करणीय संख्याएँ होती है ।

इसे हल कीजिए

i. 2 और 3 के मध्य 5 करणीय संख्याओं को मध्यमान विधि से ज्ञात करो।

ii. $-\frac{3}{11}$ और $\frac{8}{11}$ के मध्य 10 करणीय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उदाहरण-4. $\frac{7}{16}$ और $\frac{10}{7}$, $\frac{2}{3}$ को दशमलव के रूप में लिखिए।

हल :

$$\begin{array}{r} 0.4375 \\ 16\overline{)7.00000} \\ 0 \\ \hline 70 \\ 64 \\ \hline 60 \\ 48 \\ \hline 120 \\ 112 \\ \hline 80 \\ 80 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.428571 \\ 7\overline{)10} \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)2.0000} \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\therefore \frac{7}{16} = 0.4375$
अनावर्त दशमलव

$\therefore \frac{10}{7} = 1.\overline{428571}$
आवर्त दशमलव

$\therefore \frac{2}{3} = 0.666 = 0.\overline{6}$
आवर्त दशमलव

इसे हल कीजिए।

(i) $\frac{1}{17}$ (ii) $\frac{1}{19}$ को दशमलव रूप में लिखिए।

उदाहरण-5. 3.28 को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए (जहाँ p तथा q पूर्णांक संख्याएँ $q \neq 0$).

हल : $3.28 = \frac{328}{100}$

$$= \frac{328 \div 2}{100 \div 2} = \frac{164}{50}$$

$$= \frac{164 \div 2}{50 \div 2} = \frac{82}{25}$$ (अंश तथा हर सापेक्ष रूढ़ संख्याएँ)

$$\therefore 3.28 = \frac{82}{25}$$

उदाहरण-6. $1.\overline{62}$ को $\frac{p}{q}$ रूप में दर्शाइए $q \neq 0$; p, q पूर्ण संख्याएँ

हल : मानलो $x = 1.626262.....$ (1)

दोनों ओर समीकरण (1) को 100 से गुणा करने पर

$100x = 162.6262...$ (2)

(2) से (1) को घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 162.6262... \\ x & = & 1.6262... \\ - & & - \\ \hline 99x & = & 161.0000..... \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{161}{99}$$

$$\therefore 1.\overline{62} = \frac{161}{99}$$

प्रयत्न कीजिए

I. दशमलव रूप में लिखिए :

i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{1}{2^2}$ iii. $\frac{1}{5}$ iv. $\frac{1}{5 \times 2}$ v. $\frac{3}{10}$ vi. $\frac{27}{25}$ vii. $\frac{1}{3}$ viii. $\frac{7}{6}$ ix. $\frac{5}{12}$ x. $\frac{1}{7}$

निम्न दशमलव की जाँच कीजिए ।

$\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{32}{5} = 6.4$ $\frac{1}{3} = 0.333...$ $\frac{4}{15} = 0.2\overline{6}$

क्या आप आवर्त, अनावर्त दशमलव होने के लिए हर का विशेष गुण बता सकते है?

करणीय संख्याओं के हर के रूढ़ गुणनखण्ड लिखिए।

आपने क्या जाना?

निरिक्षण किजिए

हमने देखा है कि, परिमेय संख्यांएँ सिर्फ आवर्त दशमलव होते है जब हर के रुढी गुणनखंड 2,5 हो और जब हर का विस्तार रुप लिखा जाय तो वह $2^m, 5^n$ के रुप में हो जहाँ m तथा m अशून्य पुर्णांक हो।

अभ्यास - 1.1

1. (a) कोई तीन करणीय संख्याएँ लिखिए।
   (b) अपने शब्दों में करणीय संख्याओं के बारे में बताइए।
2. निम्न कथनों के लिए उदाहरण दीजिए।
   i. एक संख्या जो करणीय है परन्तु पूर्णांक नही।
   ii. पूर्ण संख्या जो करणीय नही है।
   iii. एक संख्या जो पूर्णांक संख्या है परन्तु पूर्ण संख्या नहीं है।
   iv. एक संख्या जो प्राकृतिक संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक संख्या और करणीय संख्या है।
   v. एक संख्या जो पूर्णांक संख्या है परन्तु प्राकृतिक संख्या नही है।
3. 1 और 2 के मध्य 5 करणीय संख्याएँ लिखिए।
4. $\frac{3}{5}$ और $\frac{2}{3}$ के मध्य तीन करणीय संख्याओं का निवेश कीजिए ।
5. $\frac{8}{5}$ और $\frac{-8}{5}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।
6. निम्न करणीय संख्याओं को दशमलव रूप में परिवर्तित कीजिए ।

   I. i) $\frac{242}{1000}$ ii) $\frac{354}{500}$ iii) $\frac{2}{5}$ iv) $\frac{115}{4}$

   II. i) $\frac{2}{3}$ ii) $-\frac{25}{36}$ iii) $\frac{22}{7}$ iv) $\frac{11}{9}$
7. निम्न दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए जहाँ $q \neq 0$

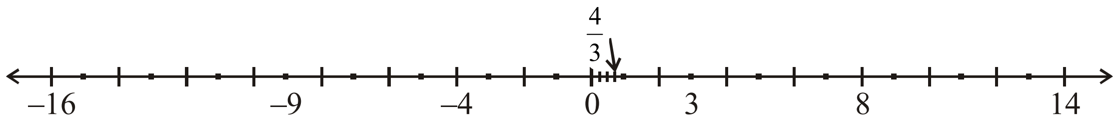
   i) 0.36 ii) 15.4 iii) 10.25 iv) 3.25
8. निम्न दशमलव को $\frac{p}{q}$ रूप में दर्शाइए।

   i) $0.\overline{5}$ ii) $3.\overline{8}$ iii) $0.\overline{36}$ iv) $3.12\overline{7}$
9. बिना भाग दिए अनावर्त दशमलव कौनसे हैं बताइए।

   (i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{11}{18}$ (iii) $\frac{13}{20}$ (iv) $\frac{41}{42}$

1.2 करणीय संख्याएँ (Rational Numbers)

पुनः संख्या रेखा को देखिए। क्या हम सभी संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? वास्तव में अनन्त संख्याएँ है जो हम संख्या रेखा पर नहीं दर्शाय गये हैं ।



इसे समझने के लिए निम्न समीकरण देखिए।

(i) $x^2 = 4$ (ii) $3x = 4$ (iii) $x^2 = 2$

(i) एक समीकरण के लिए x का मूल्य 2 और –2 है जिसे हम संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं।

(ii) समीकरण $3x = 4$ को दोनों ओर 3 से भाग देने पर $\frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ इसे हम संख्या रेखा पर दर्शा सकते है।

समीकरण (iii) $x^2 = 2$ को हल करने के लिए दोनों ओर वर्गमूल निकालने पर $\Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{2}$

क्या $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकते है?

$\sqrt{2}$ का मूल्य क्या होगा $\sqrt{2}$ किन संख्याओं से संबंधित है?

$\sqrt{2}$ का मूल्य भाग पद्धति से

	1.4142135
1	$2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
28284270	17641775

क्रम 1 : 2 के बाद दशमलव लगाइए

क्रम 2 : दशमलव के बाद शून्य लिखिए

क्रम 3 : शून्यों को जोड़ी के रूप में लिख कर अवधि - खिंचीए

क्रम 4 : पूर्ण वर्ग ज्ञात करने की विधि अपनाइए।

$\therefore\ \sqrt{2} = 1.4142135\ \ldots$

यदि हम $\sqrt{2}$ का मूल्य ज्ञात करते हैं तो $\sqrt{2}$ =1.4142135623731..... ना ही आवर्त और नाही अनावर्त दशमलव है।

दशमलव संख्याएँ जो आवर्त या अनावर्त है उन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में दर्शा सकते है। उन्हीं को करणीय संख्याएँ कहते है।

$\sqrt{2}$ अनावर्त और अकरणीय दशमलव है क्या उसे अवधि की सहायता से लिखा जा सकता है? नही। ऐसी संख्याओं को अकरणीय संख्याएँ कहते है। $\sqrt{2} \neq p/q$ (p और q, $q \neq 0$).

$\sqrt{3}$ = 1.7320508075689.....

$\sqrt{5}$ = 2.2360679774998.....

आवर्त, अनावर्त दशमलव को अकरणीय संख्याएँ कहा जाता है जिसे 'S' या 'Q' से दर्शाया जाता है। अकरणीय संख्याओं का उदाहरण -

(1) 2.1356217528...,   (2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, etc.

5वीं शताब्दि में ग्रीक के पायथागोरियन जो मशहूर गणितज्ञ दार्शनिक पायथागोरस का अनुकरण करनेवालो ने सर्वप्रथम बताया था कि जो संख्याएँ करणीय नही है उन्हे अकरणीय संख्या कहते है। पायथोगोरियन ने बताया $\sqrt{2}$ को अकरणीय संख्या कहते है। पश्चात् थियोडारस (Theodorus), साइरिन (Cyrene) ने बताया कि $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ और $\sqrt{17}$ भी अकरणीय संख्याएँ है। सुलभ सूत्र (Sulba Sutra) (800 BC) में वर्गमूल ज्ञात करने में अकरणीय संख्या का उपयोग किया गया।

इस तालिका को देखिए

$\sqrt{1}$	=	1
$\sqrt{2}$	=	1.414213.....
$\sqrt{3}$	=	1.7320508.....
$\sqrt{4}$	=	2
$\sqrt{5}$	=	2.2360679.....
$\sqrt{6}$	=	
$\sqrt{7}$	=	
$\sqrt{8}$	=	
$\sqrt{9}$	=	3

यदि 'n' प्राकृतिक संख्या जो पूर्ण वर्ग नही है तो $\sqrt{n}$ अकरणीय संख्या होगी।

अब क्या आप बता सकते हो? कौन सी संख्याएँ करणीय और अकरणीय है ।

$\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ - करणीय संख्याएँ

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ - अकरणीय संख्याएँ

विचार-विमर्श कर लिखिए ।

कृति ने कहा $\sqrt{2}$ को $\frac{\sqrt{2}}{1}$ $\frac{p}{q}$ रूप में लिख सकते हैं $\therefore$ $\sqrt{2}$ एक करणीय संख्या है। क्या आप इस तर्क से सहमत है?

π के बारे में जानकारी

π का अर्थ है वृत्त की परिधि (C) और व्यास (d) का अनुपात $\pi = \frac{c}{d}$

π एक अनुपात रूप में है अतः यह अकरणीय है । यह तथ्य झूठ सिद्ध होता है परिधि (C) और व्यास (d) की उभयनिष्ठ इकाई नही होगी। यदि सुक्ष्म रूप से जाँचा जाय तो (C) या (d) अकरणीय होगें। अतः π को हम अकरणीय संख्या ही कहेंगे।

ग्रीक के सर्वश्रेष्ठ आर्किमिडीज (Archimedez) ने π का मूल्य बताया। π का मूल्य 3.140845 तथा 3.142857 के मध्य होगा $3.140845 < \pi < 3.142857$) आर्यभट्ट (Aryabhatta) (476-550 AD) हिन्दुस्तान के श्रेष्ठ गणितज्ञ दार्शनिक ने π का उचित मूल्य चार दशमलव स्थानों तक 3.1416 बताया । तीव्र गति के संगणक आधुनिक अल्गोरिदम (algoritham) की सहायता π का मूल्य 1.24 से ऊपर ट्रिलीयन दशमलव स्थानों तक ज्ञात किया गया है ।

π =3.14159265358979323846264338327950 ….. π का दशमलव रूपान्तरण अकरणीय और अनावर्त होगा। अतः π को अकरणीय संख्या कहा गया है।

ध्यान दीजिए हम π का अनुमानीत मूल्य $\frac{22}{7}$ लेते है लेकिन $\pi \neq \frac{22}{7}$.

हम मार्च 14 को π दिवस मनाते है क्योंकि उस दिन तारिक 3.14 (अर्थात् $\pi = 3.14159$ ....) संयोग वश अलबर्ट आइनस्टाइन (Albert Einstein) भी मार्च 14, 1879 को जन्मे थे।

प्रयत्न कीजिए ।

$\sqrt{3}$ का मूल्य दशमलव के 6 स्थानों तक ज्ञात करो।

1.3 अकरणीय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना

हमने सीखा है दो करणीय संख्याओं के मध्य कई करणीय संख्याएँ उपस्थित होती है। अतः जब दो करणीय संख्याएँ संख्या रेखा पर बिन्दुओं की सहायता से दर्शायी जाती है तो उनके बीच का एक बिन्दु करणीय संख्या को दर्शाता है अर्थात् संख्या रेखा करणीय संख्याओं को दर्शाती है। क्या यह सही है? क्या आप $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? तो हम $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ अकरणीय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाएँगे।

उदाहरण-7. $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

हल : बिन्दु O से OABC एक इकाई वर्ग बनाओ जो कि संख्या रेखा पर है।

पायथागोरस प्रमेय द्वारा OB = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

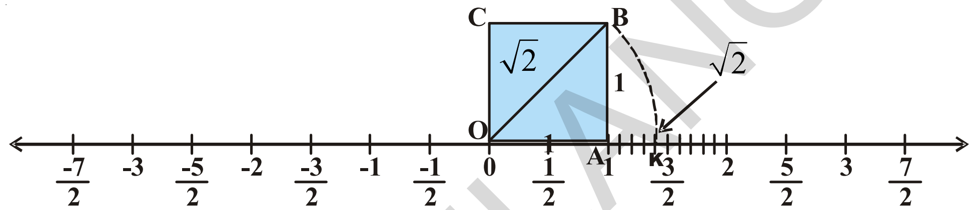


Fig. (i)

OB = $\sqrt{2}$ प्रकार की सहायता से O को केन्द्र मानकर OB अर्धव्यास से एक चाप O के दाई ओर खिचने पर वह संख्या रेखा को बिन्दु K पर काटता है। संख्या रेखा पर K = $\sqrt{2}$ को दर्शाता है।

उदाहरण-8. $\sqrt{3}$ को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

हल : चलिए पुनः चित्र (i) की ओर जायेंगे ।

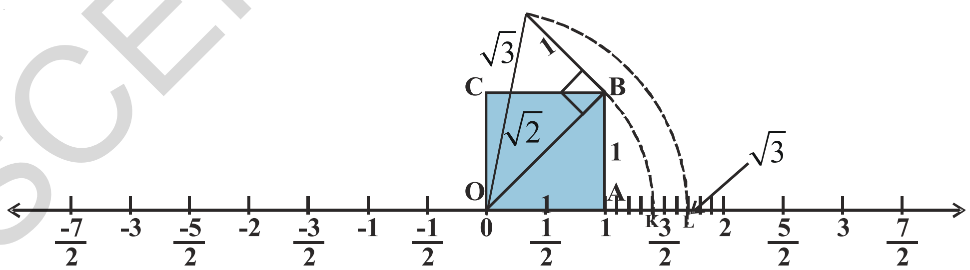


Fig. (ii)

OB पर एक इकाई लम्बाई वाला BD लम्ब डालो । (ii) OD को मिलाओ

पायथागोरस प्रमेय द्वारा, OD = $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

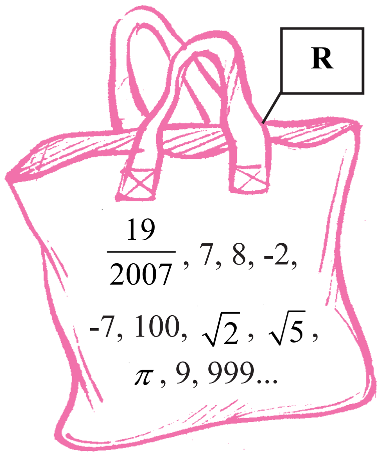
प्रकार की सहायता से O केन्द्र मानकर OD, अर्धव्यास लेकर एक चाप बनाओ जो संख्या रेखा को O के दाई ओर बिन्दु L पर फाटता L = $\sqrt{3}$. इससे पता चलता है कि संख्या रेखा पर अकरणीय संख्याओं को दर्शाया जा सकता है। $\sqrt{n-1}$ को दर्शाने के बाद किसी भी n पूर्णांक के लिए $\sqrt{n}$ को दर्शाया जा सकता है ।

प्रयत्न कीजिए

$\sqrt{5}$ और $-\sqrt{5}$ को संख्या रेखा पर दर्शाओं। [**संकेत** : $h^2 = (2)^2 + (1)^2$]

1.3 वास्तविक संख्याएँ

सभी करणीय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ रूप में लिखी जा सकती है। p, q पूर्णांक संख्याएँ $q \neq 0$. कोई दूसरी संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में नही लिखी जा सकती उन्हे अकरणीय संख्या कहते हैं। यदि हम सभी करणीय और अकरणीय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शायेंगे तो क्या कोई ऐसा भी बिन्दु है जो उनमें सम्मिलीत न होगा ।



उत्तर होगा नही! करणीय, अकरणीय संख्याएँ संख्या रेखा पर ही होगी। इनको मिलाकर जो नयी संख्या बनती है उसे वास्तविक संख्या R कहते है। प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अद्वितीय बिन्दु है। प्रत्येक बिन्दु संख्या रेखा पर अद्वितीय वास्तविक संख्या होगी। अतः हम इसे वास्तविक संख्या रेखा कहते है।

वास्तविक संख्याओं के उदाहरण -

$-5.6, \sqrt{21}, -2, 0, 1, \frac{1}{5}, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{9}$, 12.5, 12.5123..... आदि । इनमें आपने देखा कि अकरणीय एवं करणीय संख्याएँ मिलाकर लिखी गयी हैं ।

उदाहरण-9. $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{7}$ के मध्य अकरणीय संख्याएँ रखो।

हल : हम जानते हैं $\frac{1}{5} = 0.20$

$$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

$\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{7}$ के मध्य अकरणीय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए दो संख्याओं का दशमलव रूप देखिए हमें अनन्त अकरणीय संख्याएँ प्राप्त होगी।

अकरणीय संख्याओं के उदाहरण -

0.201201120111..., 0.24114111411114…, 0.25231617181912..., 0.267812147512 …

क्या आप $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच और चार अकरणीय संख्याएँ ज्ञात कर सकोगे?

उदाहरण-10. 3 और 4 के बीच अकरणीय संख्याओं को ज्ञात कीजिए ।

हल :

> यदि a और b दो धनात्मक करणीय संख्याएँ है। ab एक पूर्ण वर्ग ना हो तो $\sqrt{ab}$ अकरणीय संख्या होगी जो a और b के मध्य है।

$\therefore$ अकरणीय संख्या 3 और 4 के मध्य $\sqrt{3 \times 4}$ $= \sqrt{3} \times \sqrt{4}$

$= \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$

उदाहरण-11. जाँच करो, करणीय या अकरणीय संख्याएँ :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ (iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$

हल :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$ $= 3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}$

$= 6$, करणीय संख्या

(ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$.

$$\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right) = 3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 9 - 3 = 6$$ करणीय संख्या.

(iii) $\dfrac{10}{2\sqrt{5}} = \dfrac{10 \div 2}{2\sqrt{5} \div 2} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, अकरणीय संख्या

(iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2.\sqrt{2}\ .2 + 2^2 = 2 + 4\sqrt{2} + 4$

$= 6 + 4\sqrt{2}$, अकरणीय संख्या

अभ्यास - 1.2

1. निम्न संख्याएँ करणीय है या अकरणीय है बताइए ।

   (i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{441}$ (iii) 30.232342345…

   (iv) 7.484848… (v) 11.2132435465 (vi) 0.3030030003.....

2. अकरणीय संख्याएँ और करणीय संख्याओं में अन्तर बताओ।

3. $\dfrac{5}{7}$ और $\dfrac{7}{9}$ के मध्य कितनी अकरणीय संख्याएँ है?

4. 0.7 और 0.77 के मध्य 2 अकरणीय संख्याओं को बताओ।

5. $\sqrt{5}$ का मूल्य दशमलव के तीन स्थान तक ज्ञात करो।

6. $\sqrt{7}$ का मूल्य दशमलव के 6 स्थानों तक भाग पद्धति से ज्ञात कीजिए ।

7. $\sqrt{10}$ को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

8. 2 और 3 के मध्य 2 अकरणीय संख्याएँ बताओ।

9. सत्य या असत्य में उत्तर दीजिए जाँच भी कीजिए ।

   (i) प्रत्येक अकरणीय संख्या वास्तविक संख्या है।

   (ii) प्रत्येक करणीय संख्या वास्तविक संख्या है।

   (iii) प्रत्येक प्राकृतिक संख्या करणीय संख्या नही है।

   (iv) $\sqrt{n}$ अकरणीय नही है यदि n एक पूर्ण वर्ग है।

   (v) $\sqrt{n}$ अकरणीय है यदि n पूर्ण वर्ग ना हो।

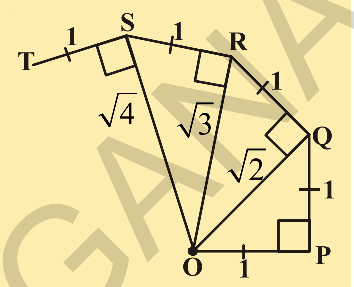
   (vi) सभी वास्तविक संख्याएँ अकरणीय है।

कार्य विधि

'सर्पिला वर्ग मूल' बनाना।

एक बड़ा कागज लेकर 'सर्पिला वर्ग मूल' निम्न विधि से बनाइए।

चरण 1 : 'O' बिन्दु से शुरू करो $\overline{OP}$ रेखा खण्ड 1 इकाई का बनाओ।



चरण 2 : $\overline{PQ}$ रेखा खण्ड $\overline{OP}$ पर लम्ब खींचो (OP = PQ = 1) (चित्र देखिए)

चरण 3 : O, Q को मिलाओ (OQ = $\sqrt{2}$)

चरण 4 : $\overline{QR}$ इकाई लम्बाई लेकर $\overline{OQ}$ पर लम्बा खींचो

चरण 5 : O, R. (OR = $\sqrt{3}$) को मिलाओ

चरण 6 : एक इकाई RS का रेखा खण्ड $\overline{OR}$ पर लम्ब डालो।

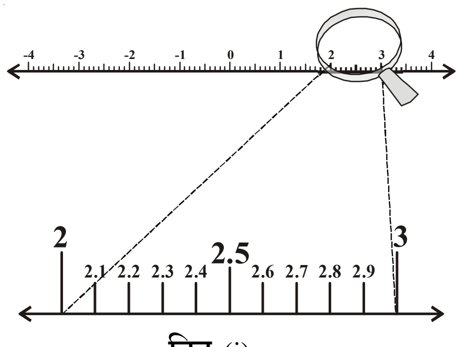
चरण 7 : इसी प्रकार क्रमागत करीए तो आपको सुन्दर सर्पिला रेखा खण्ड $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$ ... आदि। प्राप्त होगा रेखा खण्ड $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$, $\overline{OT}$, $\overline{OU}$ ... आदि। $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ को दर्शाओ।

1.4 वास्तविक संख्याओं को उत्तरोत्तर संख्या रेखा पर दर्शाना

पूर्व विदित है कि वास्तविक संख्याओं को दशमलव में बताया जा सकता है।

तथा आवृत्ति दशमलव को संख्या रेखा पर कैसे दर्शाया जाता है?

यदि हमें 2.776 को संख्या रेखा पर दर्शाना हो तो आवृत्ति दशमलव 2 और 3 के बीच दर्शाओ।



चित्र (i)

अब हम संख्या रेखा पर 2 और 3 के मध्य भाग को देखेंगे। यदि हम इसे 10 बराबर भागों में बाँटें तो अंकित अंक चित्र Fig.(i). 2.1, 2.2, 2.3.......... स्पष्टतः देखने के लिए आवर्धन काँच (magnifying glass) लेकर 2 और 3 के मध्य भाग को देखने पर यह चित्र (i) की तरह दिखाई देगा।

अब, 2.7 और 2.8. के मध्य 2.766 रहता होगा। अब हम 2.7 और 2.8 के मध्य भाग पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे और उसे 10 समान भागों में बाँटेंगे। पहला चिन्ह 2.71 और दूसरा 2.72....., फिर उसे स्पष्टतः देखने के लिए आवर्धन काँच का प्रयोग करेंगे। चित्र (ii).

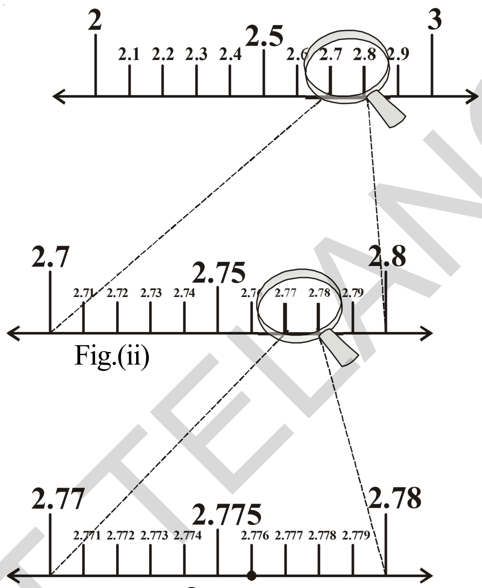


Fig.(ii)

चित्र (iii)

फिर 2.776 2.77 और 2.78 के मध्य में होगा चित्र (iii) में फिर से संख्या रेखा को 10 बराबर भागों में बाटिए।

पहला बिन्दु 2.771 दुसरा बिन्दु 2.772........, 2.776 6, छटवाँ चिन्ह होगा।

इस विधि को संख्या रेखा पर आवर्धन पद्धति की सहायता से उत्तरोत्तर (magnification) किया जायगा।

अब हम वास्तविक संख्या जो अनावर्त दशमलव को संख्या रेखा पर निम्न उदाहरण की सहायता से उत्तरोत्तर खिंचेगे ।

उदाहरण-11. $3.5\overline{8}$ को संख्या रेखा पर उत्तरोत्तर दशमलव के 4 स्थानों तक बताओ।

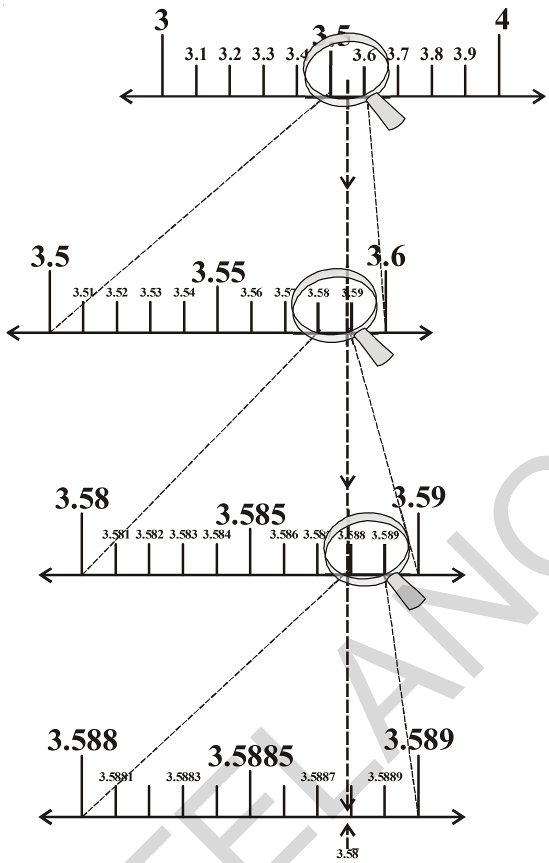
हल : उत्तरोत्तर आवर्धन की सहायता से 3.5888 को संख्या रेखा पर खिंचेंगे।

चरण 1 :

चरण 2 :

चरण 3 :

चरण 4 :



3.5888

अभ्यास - 1.3

1. 2.874 को संख्या रेखा पर उत्तरोत्तर आवर्धन पद्धति की सहायता से बताओ।
2. $5.\overline{28}$ को संख्या रेखा पर दशमलव के 2 स्थान तक बताओ।

1.5 वास्तविक संख्याओं की क्रियाएँ

करणीय संख्याओं योग और गुणा की क्रियाओं के लिए क्रम विनिमय, साहचर्य तथा बंठन नियम लागू होते हैं। करणीय संख्याएँ योग, घटान गुणा के भीतर संवृत है। अकरणीय संख्याओं के लिए भी क्या ये नियम लागू होते है?

निम्न उदाहरण देखिए

$\left(\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)=0$. (0 एक करणीय संख्या)

$\left(\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}\right)=0$. (0 एक करणीय संख्या)

$\left(\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{2}\right)=2$. (2 एक करणीय संख्या)

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 1$. (1 एक करणीय संख्या)

आपने क्या देखा? अकरणीय संख्याओं का योग, अन्तर, भागफल तथा गुणनफल अकरणीय संख्या नही होगी ।

अतः हम कहेंगे कि अकरणीय संख्याएँ योगफल, अन्तर, गुणा और भाग के अन्तर्गत संवृत्त नही है।

अकरणीय संख्याओं की कुछ प्रश्न हल करेंगे ।

मान लिजिए आप $3\sqrt{2}$ को $2\sqrt{2}$ से जोडना चाहते है, उसके योग को $5\sqrt{2}$ के रुप में लिखा जाता है यदि आप उसको घटाना चाहते हो तो आपको $\sqrt{2}$ प्राप्त होगा।

विचार- विमर्श किजिए

1) हसित कहता है कि, $5\sqrt{2} + 2\sqrt{7} = 7\sqrt{10}$ क्या आप इससे सहमत है?

2) $5\sqrt{2} - \sqrt{8}$ का मुल्य आप कैसे ज्ञात करोंगे?

उदाहरण-12. (i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (iii) $21+\sqrt{3}$ (iv) $\pi + 3$ अकरणीय संख्याएँ है या नही? जाँच कीजिए?

हल : $\sqrt{2} = 1.414...$, $\sqrt{3} = 1.732...$, $\pi = 3.1415...$

(i) $5\sqrt{2}-\sqrt{8} \quad = 5(1.414...) = 7.070...$

(ii) $\frac{5}{\sqrt{2}} \quad = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{7.070}{2} = 3.535...$ (i) से

(iii) $21+\sqrt{3} \quad = 21+1.732... = 22.732...$

(iv) $\pi + 3 \quad = 3.1415... + 3 = 6.1415...$

> यदि q करणीय और s अकरणीय हो तो q + s, q - s, qs तथा $\frac{q}{s}$ अकरणीय संख्याएँ होंगी ।

वे सभी अकरणीय संख्याएँ है।

उदाहरण-13. $5\sqrt{3} + 7\sqrt{5}$ को $3\sqrt{5} - 7\sqrt{3}$ में से घटाओ।

हल : $(3\sqrt{5} - 7\sqrt{3}) - (5\sqrt{3} + 7\sqrt{5})$

$= 3\sqrt{5} - 7\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 7\sqrt{5}$

$= -4\sqrt{5} - 12\sqrt{3}$

$= -(4\sqrt{5} + 12\sqrt{3})$

उदाहरण-14. $6\sqrt{3}$ को $13\sqrt{3}$ से गुणा करो।

हलः $6\sqrt{3}\times 13\sqrt{3} = 6\times 13\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 78\times 3 = 234$

वर्ग मूल के गुणों का अवलोकन करेंगे। उन्हें कई विधियों से प्रयोग किया जा सकता है। मान लो a तथा b अ-ऋणातत्मक वास्तविक संख्याएँ है।

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; if $b \neq 0$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

इन गुणों के कुछ स्थितियों का अवलोकन करेंगे ।

उदाहरण-15. निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

हल :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) = 6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

(ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5+2\sqrt{10}+2 = 7+2\sqrt{10}$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5-2 = 3$

1.5.1 हर को परिमेय बनाओ

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकोगे?

क्या आप $\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मूल्य क्या होगा?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ का किस प्रकार मूल्य ज्ञात करोगे? $\sqrt{2} = 1.4142135.....$ आवर्त या अनावर्त नही होगा। इसे हम 1 से भाग दे सकते हैं।

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मूल्य ज्ञात करना आसान नही है।

हर को करणीय रूप में बदलने पर -

हर को परिमेय $\frac{1}{\sqrt{2}}$ में बदलने के लिए हर और अंश को $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर -

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{(यह } \sqrt{2} \text{ का आधा है)}$$

क्या हम $\frac{\sqrt{2}}{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? यह 0 (zero) और $\sqrt{2}$ के मध्य होगा।

नीचे दिए गए संख्याओं का अवलोकन कीजिए :

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. $\therefore$ $\sqrt{2}$ ही $\sqrt{2}$ का (R.F) परिमेयकारक खण्ड है।

उसी प्रकार $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$. अतः $\sqrt{2}$ और $\sqrt{8}$ एक दूसरे के परिमेयकारक खण्ड होंगे। $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$ आदि। $\sqrt{2}$ एक सरल परिमेयकारक खण्ड $\sqrt{18}$ है।

नोट : दो अकरणीय संख्याओं का गुणनफल करणीय संख्या होगा अतः प्रत्येक अकरणीय संख्या एक दूसरे का परिमेय कारक (R.F) खण्ड होगा।दिए गए अकरणीय संख्या के लिए वह खण्ड अद्वितीय नही होगा। दिए गए अकरणीय संख्या का परिमेयकारक खण्ड (R.F.) प्रयोग के लिए सरल होगा।

इसे हल कीजिए -

हर का परिमेय कारक खण्ड बताइए (i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

उदाहरण-16. हर को परिमेय बनाइए $\dfrac{1}{4+\sqrt{5}}$

हल : $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

$\dfrac{1}{4+\sqrt{5}}$ हर और अंश को $4-\sqrt{5}$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{4+\sqrt{5}}\times\frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=\frac{4-\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4-\sqrt{5}}{16-5}=\frac{4-\sqrt{5}}{11}$$

उदाहरण-17. हर को परिमेय बनाइए $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}$

हल : $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\dfrac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}=\dfrac{7-4\sqrt{3}}{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{7-4\sqrt{3}}{49-16\times 3}$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7-4\sqrt{3}$$

उदाहरण-18. सरल करो $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$

हल : $7+4\sqrt{3}$ का परिमेय कारक खण्ड $7-4\sqrt{3}$ तथा $2+\sqrt{5}$ का $2-\sqrt{5}$ होगा।

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\times\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2}+\frac{2-\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}+\frac{2-\sqrt{5}}{(4-5)}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{1}+\frac{2-\sqrt{5}}{(-1)}$$

$$=7-4\sqrt{3}-2+\sqrt{5}=5-4\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

1.5.2 वास्तविक संख्याओं में घातांक नियम

घातांक नियमों का अवलोकन

i) $a^m.a^n = a^{m+n}$ ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ iii) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{if } m > n \\ 1 & \text{if } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{if } m < n \end{cases}$

iv) $a^m b^m = (ab)^m$ v) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ vi) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

$a^0=1$ 'a', 'b' और 'n' पूर्णांक संख्याएँ है $a \neq 0$. $b \neq 0$ आधार, a, b है।

उदाहरण के लिए

i) $7^3.7^{-3} = 7^{3+(-3)} = 7^0 = 1$ ii) $(2^3)^{-7} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}$

iii) $\frac{23^{-7}}{23^4} = 23^{-7-4} = 23^{-11}$ iv) $(7)^{-13}.(3)^{-13} = (7\times3)^{-13} = (21)^{-13}$

निम्न की संगणना कीजिए

i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

पूर्व के उदाहरण में आधार और घातांक करणीय संख्याएँ है। घातांक के नियमों का उपयोग धनात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए किया जायगा। पहले हम n^{th} का वर्ग वास्तविक संख्याओं के लिए जानेंगे।

$3^2 = 9$ तो $\sqrt{9} = 3$ (9 का वर्ग मूल 3)

$\therefore \sqrt[2]{9} = 3$

यदि $5^2 = 25$ तो $\sqrt{25} = 5 \;\therefore \sqrt[2]{25} = 5$

$\sqrt[2]{25} = (25)^{\frac{1}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$

निम्न पर ध्यान दीजिए।

यदि $2^3 = 8$ तो $\sqrt[3]{8} = 2$ (8 का घन मूल 2); $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2$

$2^4 = 16$ तो $\sqrt[4]{16} = 2$ (16 का चौथा मूल 2); $\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2$

$2^5 = 32$ तो $\sqrt[5]{32} = 2$ (32 का पाँचवा मूल = 2); $\sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2$

$2^6 = 64$ तो $\sqrt[6]{64} = 2$ (64 का छटवाँ मूल = 2); $\sqrt[6]{64} = (64)^{\frac{1}{6}} = (2^6)^{\frac{1}{6}} = 2$

....

उसी प्रकार $\mathbf{a^n = b}$ हो तो $\sqrt[n]{\mathbf{b}} = \mathbf{a}$ (b का n वा मूल $= a$); $\sqrt[n]{b} = (b)^{\frac{1}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a$

मान लो $\mathbf{a} > 0$ वास्तविक संख्या '**n**' एक धनात्मक पूर्णांक है।

यदि $\mathbf{b^n} = \mathbf{a}$, कोई धनात्मक वास्तविक संख्या '**b**', के लिए, **b** - **a** का n वा वर्ग होगा। $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$.

मान लो a > 0 वास्तविक संख्या p, q करणीय संख्या

i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ iv) $a^p.b^p = (ab)^p$ v) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

इन नियमों का प्रयोग पहले पूछे गए प्रश्नों को हल करने में करेंगे।

उदाहरण-19. सरल करो

i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

हल : i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{7}}$

iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{3-5}{15}} = 3^{\frac{-2}{15}} = \dfrac{1}{3^{2/15}}$

iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}} = (7\times11)^{\frac{1}{17}} = 77^{\frac{1}{17}}$

इसे हल कीजिए -

सरल करो :

i. $(16)^{\frac{1}{2}}$ ii. $(128)^{\frac{1}{7}}$

iii. $(343)^{\frac{1}{5}}$

करणी (Surd) :

यदि 'n' एक धनात्मक पूर्णांक जो कि 1 से बड़ा है **a** एक **n** वे घातांक की धनात्मक करणीय संख्या $\sqrt[n]{a}$ (or) $a^{1/n}$ उसे **n** क्रम वाली करणी कहेंगे। साधारणतः **n** वा वर्ग **a** हो तो उसे करणी या (radical) कहेंगे। **a** को radical $\sqrt[n]{\ }$ यह radical का चिन्ह होगा। **n** को radical का घातांक कहते है।

करणी के उदाहरण

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, ...$ आदि।

करणी के प्रकार
घातांक रूप $a^{\frac{1}{n}}$
Radical रूप $\sqrt[n]{a}$

वास्तविक संख्या $\sqrt{7}$. इसे $7^{\frac{1}{2}}$ रूप में भी लिखा जा सकता है। 7 किसी संख्या का वर्ग नही है $\therefore \sqrt{7}$ को करणी कहेंगे।

वास्तविक संख्या $\sqrt[3]{8}$. 8, 2 का धन है।

$\therefore \sqrt[3]{8}$ करणी नही होगा।

वास्तविक संख्या $\sqrt{\sqrt{2}}$. $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$. यह संख्या एक करणी है।

इसे हल कीजिए -

1. निम्न करणी को घातांक रूप में लिखिए।

   i. $\sqrt{2}$ ii. $\sqrt[3]{9}$ iii. $\sqrt[5]{20}$ iv $\sqrt[17]{19}$

2. करणी को Radical रूप में लिखिए

   i. $5^{\frac{1}{7}}$ ii. $17^{\frac{1}{6}}$ iii. $5^{\frac{2}{5}}$ iv $142^{\frac{1}{2}}$

अभ्यास - 1.4

1. सरल कीजिए :

   i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

   iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

2. निम्न को करणीय या अकरणीय है बताइए

   i) $5-\sqrt{3}$ ii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ iii) $\left(\sqrt{2}-2\right)^2$

iv) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ v) 2π vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vii) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

3. निम्न समीकरणों में x, y, z आदि चर राशी का मूल्य करणीय या अकरणीय है बताओ।

i) $x^2 = 7$ ii) $y^2 = 16$ iii) $z^2 = 0.02$

iv) $u^2 = \frac{17}{4}$ v) $w^2 = 27$ vi) $t^4 = 256$

4. वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात $\frac{c}{d} = \pi$ π को हम अकरणीय संख्या कहते हैं क्यों?

5. हर को परिमेय बनाइए।

i) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ iv) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6. निम्न में प्रत्येक को परिमेय बनाइए।

i) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ iii) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ iv) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$ का मूल्य दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात करो। ($\sqrt{2} = 1.414$ तथा $\sqrt{5} = 2.236$)

8. ज्ञात करो :

i) $64^{\frac{1}{6}}$ ii) $32^{\frac{1}{5}}$ iii) $625^{\frac{1}{4}}$

iv) $16^{\frac{3}{2}}$ v) $243^{\frac{2}{5}}$ vi) $(46656)^{\frac{-1}{6}}$

9. सरल करो : $\sqrt[4]{81} - 8\sqrt[3]{343} + 15\sqrt[5]{32} + \sqrt{225}$

10. यदि 'a' और 'b' करणीय संख्याएँ हो तो प्रत्येक समीकरण के लिए a और b का मूल्य ज्ञात करो।

i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a + b\sqrt{6}$ ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} = a - b\sqrt{15}$

हमने क्या सीखा?

इस अध्याय में निम्न लिखित अंशों के बारे में चर्चा की गयी।

1. एक संख्या जो $\frac{p}{q}$ रूप में लिखी गई p तथा q पूर्णांक संख्याएँ $q \neq 0$ हो तो उन्हें करणीय संख्याएँ कहते हैं।
2. जो संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में न लिखी जाए p, q पूर्णांक संख्याएँ $q \neq 0$ उन्हें अकरणीय संख्याएँ कहते है।
3. करणीय संख्याओं का दशमलव विस्तार आवर्त या अनावर्त होगा।
4. अकरणीय संख्याओं का दशमलव विस्तार अनन्त या आवर्त होगा।
5. संख्या रेखा पर का प्रत्येक बिन्दु अद्वितीय वास्तविक संख्या होगी।
6. करणीय और अकरणीय संख्याओं का समूह वास्तविक संख्या कहलाता है।
7. यदि q करणीय और s अकरणीय हो तो q+s, q-s, qs तथा $\frac{q}{s}$ अकरणीय होंगे।
8. यदि n एक प्राकृतिक संख्या (पूर्ण वर्ग ना हो) $\sqrt{n}$ - को अकरणीय संख्या कहेंगे।
9. निम्न धनात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए समरूपता a और b

   i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

   iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$ iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

   v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
10. हर को परिमेय बनाने के लिए $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$, को $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ से गुणा करना चाहिए, जहाँ a, b पूर्णांक है।
11. मान लो $a > 0$, $b > 0$ वास्तविक संख्या है। p और q करणीय संख्याएँ

    i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$ iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

    iv) $a^p . b^p = (ab)^p$
12. 'n' एक धनात्मक पूर्णांक है। जो 1 से बड़ी होगी तथा 'a' धनात्मक पूर्णांक संख्या हो तो n^{th} घातांक कोई करणीय संख्या न हो तो $\sqrt[n]{a}$ या $a^{\frac{1}{n}}$ को n वे क्रम की करणी कहते हैं।

बहुपद व्यजंक और खंडों में विभाजन

(POLYNOMIALS AND FACTORIZATION)

02

2.1 भूमिका

एक बगीचे में पौधों की 6 पंक्तियाँ हैं। प्रत्येक पंक्ति में 6 पौधे हैं। कुल पौधों की संख्या क्या होगी? यदि 'x' पौधे, 'x' पंक्तियों में लगाए जाएँ तो कुल पौधे $x \times x = x^2$ होंगे।

प्याज का दाम रु.10 प्रति किग्रा इन्द्र ने p किग्रा और राजू ने q किग्रा तथा हनीफ ने r किग्रा खरीदे तो प्रत्येक ने कितने पैसे दिए? रु.10p, रु.10q तथा रु.10r होंगे। बीजगणीतीय सर्व समिकाओं का उपयोग किया जायेगा।

बीजगणितीय समीकरण 's^2' वर्ग का क्षेत्रफल आयत का क्षेत्रफल 'lb' घनाभ का आयतन 'lbh'

बीजगणीतीय समीकरण $3xy, x^2+2x, x^3- x^2 + 4x + 3, \pi r^2, ax + b$ बहुपदीय व्यजंक कहलाएंगे नोट :सभी बीजीय समीकरण (non-negative) ऋणात्मक पूर्णांक न हो तो उसे चर राशि के घातांक कहेंगे।

क्या आप निम्न बीजीय समीकरणों से बहुपदीय ब्यंजक बता सकते हैं?

$$x^2, \quad x^{\frac{1}{2}} + 3, \quad 2x^2 - \frac{3}{x} + 5; \quad x^2 + xy + y^2$$

$x^{\frac{1}{2}} + 3$ यह बहुपदीय व्यजंक नहीं है क्योंकि पहला पद $x^{\frac{1}{2}}$ जिसमें घातांक (non-negative) (ऋणात्मक पूर्णांक नहीं हो) (अतः $\frac{1}{2}$) तथा $2x^2 - \frac{3}{x} + 5$ भी बहुपदीय व्यजंक नहीं है। क्योंकि दूसरे पद का $(3x^{-1})$ ऋणात्मक घातांक-1 है। अतः बीजीय समीकरण जिसमें चर राशि पर ऋणात्मक घातांक न हो तो उसे बहुपदीय व्यजंक कहेंगे।

विचार-विमर्श कीजिए

समीकरणों में से कौन से बहुपदी व्यंजक हैं और कौन से नहीं? कारण बताइए।

(i) $4x^2 + 5x - 2$ (ii) $y^2 - 8$ (iii) 5 (iv) $2x^2 + \frac{3}{x} - 5$

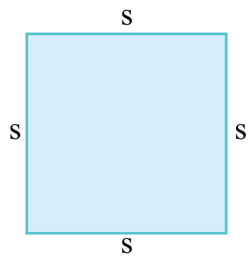
(v) $\sqrt{3}x^2 + 5y$ (vi) $\frac{1}{x+1}$ (vii) $\sqrt{x}$ (viii) $3\,xyz$

इस अध्याय में बहुपदीयों का खण्डों में विभाजन, खण्ड प्रमेय और उसका बहुपदीयों के खण्डों में विभाजन कैसे किया जाता है, इस बारे में जानेंगे।

2.2 बहुपद एक चरराशि वाले (Polynomials in one variable)

चरराशि का प्रतीक जो एक वास्तविक मूल्य द्वारा दर्शाया जाता है। उदाः x, y, z ...आदि।
बीजीय समीकरण

अतः $2x, 3x, -x, \frac{3}{4}x$ .... एक चरराशि x वाले बीजगणितीय पद हैं।
ये समीकरण (स्थिर संख्या) × (चरराशि कुछ घातांक वाली) के रूप में हैं।
यदि हमें वर्ग की परिमिति ज्ञात करनी हो तो सूत्र P = 4s द्वारा करेंगे।



यहाँ '4' एक स्थिर राशि और 's' चर राशि है जो वर्ग की भुजा को बताती है। अलग अलग वर्गों की भुजाएँ भी अलग होंगी।

निम्न सारणी को देखिए :

वर्ग की भुजा (s)	परिमिति (4s)
4 cm	P = 4 × 4 = 16 cm
5 cm	P = 4 × 5 = 20 cm
10 cm	P = 4 × 10 = 40 cm

यहाँ स्थिर राशि '4' का मूल्य नहीं बदलेगा। चरराशि का मूल्य बदलता है।

यदि हम समीकरण जो (स्थिरराशि) × (चरराशि) के रूप में हो और हमें स्थिर राशि ज्ञात न हो तो उसे a, b, c रूप में बता सकते हैं।

तो साधारण समीकरण होगा $ax, by, cz,$ .... आदि। जहाँ a, b, c ... लगातार स्थिरांक है। आप $x^2, x^2 + 2x + 1$, $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ बीजीय समीकरण से परिचित होंगे। यह सभी समीकरण एकपदीय बहुपद व्यंजक हैं।

इसे कीजिए -

- 'x' चरराशि वाले कोई दो बहुपद लिखिए ।
- 'y'चरराशि वाले 3 बहुपद लिखिए।
- $2x^2 + 3xy + 5y^2$ ये बहुपद क्या एक ही चरराशि के है?
- ठोस आकृति वाले वस्तुओं के क्षेत्रफल, आयतन ज्ञात करने के सूत्र लिखिए। उसमें स्थिर पद तथा चरराशि ज्ञात कीजिए।

2.3 बहुपद व्यंजक का घात (Degree of Polynomial) :

बहुपद के प्रत्येक पद में स्थिर पद जिसे पद का गुणांक सीमित संख्याओं की चरराशि अत्रृणात्मक घात (called - co etticient of the term) बहुपद का घात चरराशियों के घातांकों का योग होगा। बहुपद का घात चरराशि का सबसे बड़ा घात होगा।

पदों में गुणांक और बहुपद का घात ज्ञात करना।

(i) $3x^2 + 7x + 5$ (ii) $3x^2y^2 + 4xy + 7$

बहुपद $3x^2 + 7x + 5$ समीकरण में $3x^2$, $7x$ और 5 तीन पद है। बहुपद के प्रत्येक पद में गुणांक होगा। $3x^2 + 7x + 5$ में x^2 का गुणांक 3 है। 7 x में 7 और 5 की चरराशि x^0 (x^0=1)

बहुपद का घात चरराशि की सबसे बड़ी घात है।

$3x^2$ पद में सबसे बड़ी घात है अतः $3x^2 + 7x + 5$ समीकरण की घात '2' है।

$3x^2y^3 + 4xy + 7$ बहुपद का गुणक और घात ज्ञात कर सकोगे।

x^2y^3 का गुणक 3, xy का गुणक 4 x^0y^0 का गुणक 7 है। चरराशि $3x^2y^3$ के घातों का योगफल $2 + 3 = 5$ जो सबसे बड़ा है अतः $3x^2y^3 + 4xy + 7$ बहुपद का घात 5 है।

स्थिर राशि के गुणक के बारे में सोचिए। स्थिर राशि में कोई चरराशि नहीं होती अतः उसे हम x^0 लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए 5 के चरराशि का घातांक 0 है। इसे $5x^0$ भी लिखा जा सकता है।

किसी प्राकृतिक संख्या 'x' को एक से अधिक चरराशि के रूप में लिखा जा सकता है? x चरराशि वाले बहुपद जिसकी घात n हो।

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ स्थिरांक है $a_n \neq 0$.

यदि $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (सभी स्थिरांक 0), तो हमें शून्य बहुपद प्राप्त होगा जिसकी संख्या 0 है।

क्या आप शून्य का घात बता सकेंगे? इसे नहीं दर्शाया जा सकता है। चरराशि की घात 0 हो तो उसे गुणा के रूप में नहीं बताया जा सकता।

इसे हल कीजिए -

1. निम्न बहुपदीयों के घात बताइए।
   (i) $7x^3 + 5x^2 + 2x - 6$ (ii) $7 - x + 3x^2$
   (iii) $5p - \sqrt{3}$ (iv) 2 (v) $-5xy^2$
2. निम्न बहुपदीयों में x^2 के गुणक बताइए।
   (i) $15 - 3x + 2x^2$ (ii) $1 - x^2$ (iii) $\pi x^2 - 3x + 5$ (iv) $\sqrt{2}x^2 + 5x - 1$

नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए...।

(i) घात के अनुसार बहुपदी

बहुपदी की घात	बहुपदी का नाम	उदाहरण
नही बताया	शून्य बहुपदी	0
0	स्थिर बहुपदी	$-12; 5; \frac{3}{4}$ etc
1	एकल बहुपदी	$x - 12; -7x + 8; ax + b$ etc.
2	....	....
3	तृतीय घनाभ बहुपदी	$3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$

अधिकतर 'n' घात वालें बहुपदी को n^{th} घात की बहुपदी कहते है।

(ii) बहुपदी के प्रकार पदों की संख्या के आधार पर

अशून्य पदो की संख्या	बहुपदीयो के नाम	उदाहरण	पद
1	एक पदी	$-3x$	$-3x$
2	द्वी पदी	$3x + 5$	$3x$, 5
3	त्री पदी	$2x^2 + 5x + 1$	....
३ से अधिक	बहुपदी	....	$3x^3$, $2x^2$, $-7x$, 5

सूचना : एक बहुपदी, बहुपदी व्यंजक हो सकता है। लेकिन एक बहुपदी व्यंजक बहुपदी होना आवश्यक नहीं है।

एक चरराशि वाले सरल रेखीय व्यंजक एक पदी या द्विपदी होता है।

उदा: $3x$ or $2x - 5$

समझो सोचो और करो -

उदाहरण सहित बताइए 3 घात वाले एक चरराशिवाले बहुपदी में कितने पद होगे ?

यदि बहुपदी की चरराशि x हो, तो हम बहुपद को $p(x)$, $q(x)$ या $r(x)$ द्वारा दर्शा सकते है।

$p(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$q(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$

$r(y) = y^4 - 1$

$t(z) = z^2 + 5z + 3$

कोशिश करो-

1. चरराशि x वाहे 2 पर लिखो।
2. p चरराशि वाहे 15 पद के बहुपदी किस प्रकार लिखोगे ?

किसी बहुपद मे कुछ संख्या वाले पद होते है।

एक पदी बहुपदीयो के बारे में हमने चर्चा की है। एक से अधिक चरराशिवाले भी बहुपदी बताए जा सकते है। उदा - $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$ ये बहुपद दो चार राशी वाले है। $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$ ये बहुपद 3 चर राशी वाले है।

अभ्यास 2.1

1. निम्न बहुपदीयो के घात बताओ।

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $x^2 + x - 5$ (iii) 5

(iv) $3x^6 + 6y^3 - 7$ (v) $4 - y^2$ (vi) $5t - \sqrt{3}$

2. निम्न समीकरणो में कौनसे एक चरराशिवाले बहुपदी है और नही भी कारण बताओ।

(i) $3x^2 - 2x + 5$ (ii) $x^2 + \sqrt{2}$ (iii) $p^2 - 3p + q$

(iv) $y + \frac{2}{y}, (y \neq 0)$ (v) $5\sqrt{x} + x\sqrt{5}, (x > 0)$ (vi) $x^{100} + y^{100}$

3. निम्न में x^3 के गुणक बताइए।

(i) $x^3 + x + 1$ (ii) $2 - x^3 + x^2$ (iii) $\sqrt{2}x^3 + 5$ (iv) $2x^3 + 5$

(v) $\frac{\pi}{2}x^3 + x$ (vi) $-\frac{2}{3}x^3$ (vii) $2x^2 + 5$ (vi) 4

4. निम्न बहुपदीयो में कौन-से एकपदी द्वि या त्रिपदी है पहचानिए।

(i) $5x^2 + x - 7$ (ii) $x - x^3$ (iii) $x^2 + x + 4$ (iv) $x - 1$

(v) $3p$ (vi) πr^2

5. निम्न कथन सत्य या असत्य बताइए और अपने कथन की पुष्टि भी कीजिए।

(i) एक द्विपदी में दो पद होगे।

(ii) प्रत्येक वहुपदी द्विपदी होगा।

(iii) एक द्विपदी में 3 घात है ?

(iv) शून्य बहुपदी की घात शून्य है।

(v) $x^2 + 2xy + y^2$ बहुपदी की घात 2 है।

(vi) πr^2 एक पदी है।

6. एक पदी और त्रीपदी के 10 घात बाले उदाहरण बताओ।

2.4 शून्य बहुपदी

- बहुपद व्यंजक को देखिए $p(x) = x^2 + 5x + 4$.

  $p(x)$ का मूल्य क्या होगा, जब $x = 1$.

  $p(x)$ में x के स्थान पर 1 लगाने पर

$$p(1) = (1)^2 + 5(1) + 4,$$
$$= 1 + 5 + 4 = 10$$

$p(x)$ का मूल्य यदि $x = 1$ हो तो 10 होगा।

उसी प्रकार $p(x)$ का मूल्य $x = 0,\ x = -1$ से

$$p(0) = (0)^2 + 5(0) + 4$$
$$= 0 + 0 + 4$$
$$= 4$$

$$p(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 4$$
$$= 1 - 5 + 4$$
$$= 0$$

$p(-4)$ का मूल्य ज्ञात करो।

- और एक उदाहरण को देखिए

$$s(y) = 4y^4 - 5y^3 - y^2 + 6$$
$$s(1) = 4(1)^4 - 5(1)^3 - (1)^2 + 6$$
$$= 4(1) - 5(1) - 1 + 6$$
$$= 4 - 5 - 1 + 6$$
$$= 10 - 6$$
$$= 4$$

$s(-1)$?

इन्हें कीजिए-

चरराशिका मूल्य देने पर बहुपदी का मूल्य ज्ञात करो।

(i) $p(x) = 4x^2 - 3x + 7$ यदि $x = 1$

(ii) $q(y) = 2y^3 - 4y + \sqrt{11}$ यदि $y = 1$

(iii) $r(t) = 4t^4 + 3t^3 - t^2 + 6$ यदि $t = p,\ t \in R$

(iv) $s(z) = z^3 - 1$ यदि $z = 1$

(v) $p\,(x) = 3x^2 + 5x - 7$ यदि $x = 1$

(vi) $q\,(z) = 5z^3 - 4z + \sqrt{2}$ यदि $z = 2$

- बहुपदी $r\,(t) = t - 1$

$r(1) = ?\quad r(1) = 1 - 1 = 0$

$r(1) = 0$, शून्य बहुपदी $r(t)$ का मूल्य 1 है।

शून्य का बहुपदी $p(x)$ का मूल्य $p(x) = 0$.

इसे हम बहुपदी $p\ (x)$ का मूल कहेंगे।

$f(x) = x + 1$ का शून्य मूल्य क्या होगा?

$x + 1 = 0,\ x = -1$. यदि $f(x)$ एक बहुपदी है x का तो $f(x) = 0$, x का बहुपदीय समीकरण होगा। '-1' एक $f(x)$ का मूल है। '-1' $x + 1$ बहुपदी का शून्य मूल्य है। $x + 1 = 0$ बहुपदी का मूल है।

- 3 स्थिरांक वाले बहुपदी की कल्पना करो। उसका शून्य मूल्य क्या है? $3 = 3x^0$, $3x^0$ के दिए x का कोई वस्तविक मूल्य नही है। अतः स्थिर बहुपदीयों का शून्य नही होगा। परन्तु शून्य बहुपदी स्थिर बहुपदी होगा जिसमें कई शून्य होगे।

कोशिश

निम्न बहुपदीयो के शून्य मूल्य ज्ञात करो।

1. $2x - 3$ 2. $x^2 - 5x + 6$
3. $x + 5$

उदाहरण -1 $p(x) = x + 2$, $p(1), p(2), p(-1)$ और $p(-2)$ के शून्य मूल्य ज्ञात करो? यहाँ $1, 2, -1$ और -2 $p(x)$ के शून्य हैं क्या?

हल : मान लो $p(x) = x + 2$

x के स्थान पर 1लगाने पर

$p(1) = 1 + 2 = 3$

x के स्थान पर 2 लगाने पर

$p(2) = 2 + 2 = 4$

x के श्तान पर -1लगाने पर

$p(-1) = -1 + 2 = 1$

x के स्थान पर -2 लगाने पर

$p(-2) = -2 + 2 = 0$

अतः $x + 2$ के बहुपदी के शून्य $1, 2, -1$ नही है। अतः -2 उस बहुपदी का शून्य मूल्य होगा।

उदाहरण-2. $p(x) = 3x + 1$ बहुपदी का शून्य मूल्य ज्ञात करो।

हल : $p(x)$ का शून्य मूल्य समीकरण को हल करने पर-

$$p(x) = 0$$

$$\text{i.e.}\quad 3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$3x + 1$ का शून्य मूल्य $-\frac{1}{3}$ होगा।

उदाहरण-3. $2x - 1$ का शून्य मूल्य ज्ञात करो।

हल : $p(x) = 0$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{1}{2}\right)$ का मूल्य ज्ञात करने पर $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

यदि $p(x) = ax + b,\ a \neq 0$, (linear polynomial), रेखिक बहुपदी है। $p(x)$ का शून्य मूल्य। $p(x)$ का शून्य मूल्य ज्ञात करने के लिए $p(x) = 0$ को हल करना होगा।

$ax + b = 0,\ \ a \neq 0$

$ax = -b$

i.e., $x = \frac{-b}{a}$

$x = \frac{-b}{a}$

रेखिक बहुपद एक चर राशी के लिए एक ही शून्य होगा।

इन्हें कीजिए

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

रैखिक बहुपदी	बहुपदी का शून्य
$x + a$	$-a$
$x - a$	-------------
$ax + b$	-------------
$ax - b$	$\frac{b}{a}$

उदाहरण 4. $x^2 - 3x + 2$ बहुपदी का शून्य मूल्य 2 या 1 होगा? जाँच कीजिए।

हल: मान लो $p(x) = x^2 - 3x + 2$

x के स्थान पर 2 लगाने पर

$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 2$

$= 4 - 6 + 2 = 0$

x के स्थान पर 1 लगाने पर

$p(1) = (1)^2 - 3(1) + 2$

$= 1 - 3 + 2$

$= 0$

अतः $x^2 - 3x + 2$ बहुपदी के लिए 2 और 1 शून्य मूल्य होगे।

$x^2 - 3x + 2$ बहुपद की घात क्या है? क्या यह रैखिक बहुपदी है? नहीं? यह एक द्विपदी बहुपदी है अतः इसके दो शून्य मूल्य होगे।-

उदाहरण-5. $x^2 + 2x - a$ का शून्य मूल्य 3 हो तो a का मूल्य ज्ञात करो।

हल : $p(x) = x^2 + 2x - a$

$p(3) = 0.$

$x^2 + 2x - a = 0$

$(3)^2 + 2(3) - a = 0$

$9 + 6 - a = 0$

$15 - a = 0$

$-a = -15$

अतः $a = 15$

$a = 15$

सोचिए चर्चा कीजिए और लिखिए ।

1. $x^2 + 1$ का शून्य नही है क्यो ?
2. बहुपदी की घात 'n' हो तो शून्य बहुपदी की संख्याओं को ज्ञात करो।

अभ्यास - 2.2

1. $4x^2 - 5x + 3$ बहुपदी का मूल्य ज्ञात करो।

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = \frac{1}{2}$

2. $p(0), p(1)\ p(2)$ निम्न बहुपदीयो के मूल्य ज्ञात करो।

(i) $p(x) = x^2 - x + 1$ (ii) $p(y) = 2 + y + 2y^2 - y^3$

(iii) $p(z) = z^3$ (iv) $p(t) = (t-1)(t+1)$

(v) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

3. x के मूल्य देने पर प्रत्येक का शून्य मूल्य ज्ञात करो।

(i) $p(x) = 2x + 1; x = -\frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi; x = \frac{-3}{2}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1;\ x = \pm 1$ (iv) $p(x) = (x-1)(x+2);\ x = -1, -2$

(v) $p(y) = y^2;\ y = 0$ (vi) $p(x) = ax + b;\ x = -\frac{b}{a}$

(vii) $f(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $f(x) = 2x - 1, x = \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$

4. प्रत्येक के लिए बहुपदी का शून्य मूल ज्ञात करो।

(i) $f(x) = x + 2$ (ii) $f(x) = x - 2$ (iii) $f(x) = 2x + 3$

(iv) $f(x) = 2x - 3$ (v) $f(x) = x^2$ (vi) $f(x) = px,\ p \neq 0$

(vii) $f(x) = px + q,\ p \neq 0,\ p\ q$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

5. यदि बहुपदी का शून्य मूल 2 हो तो $p(x) = 2x^2 - 3x + 7a$, a का मूल्य ज्ञात करो।

6. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ का शून्य मूल्य ० हो तो a और b का मूल्य ज्ञात करो।

2.5 बहुपदियों का भाग (Division of Polynomials)

निम्न उदाहरण देखिए -

(i) मान लो दो संख्याएँ 25 और 3 है। 25 को 3 से भाग देने पर भागफल 8 और शेष 1 होगा।

Dividend = (Divisor × Quotient) + Remainder

भाज्य = (भाजक × भागफल) + शेष

$25 = (8 \times 3) + 1$

20 को 5 से भाग देने पर $20 = (4 \times 5) + 0$

यहाँ शेष शून्य है। 20 का खण्ड 5 है। 20 का खण्ड 4 है। 20 को 5 का गुणांक है।

जैसे हम एक संख्या को एक अशून्य संख्या से भाग देते है उसी प्रकार एक बहुपदी को दूसरे बहुपदी से भाग दे सकते है।

(ii) $3x^3 + x^2 + x$ बहुपदी को x से भाग देने पर-

$$(3x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{3x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$
$$= 3x^2 + x + 1$$

प्रत्येक पद में x उभयनिष्ठ खण्ड हो तो $3x^3 + x^2 + x$ - $x(3x^2 + x + 1)$

$(3x^3 + x^2 + x)$ के खण्ड होंगे।

(iii) उदाहरण $(2x^2 + x + 1) \div x$, $(x \neq 0)$

$$(2x^2 + x + 1) \div x = \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$$
$$= 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x+1 \\ \hline x & 2x^2 + x + 1 \\ & -2x^2 \\ \hline & \qquad x+1 \\ & \qquad -x \\ \hline & \qquad\quad 1 \\ \hline \end{array}$$

क्या यह एक बहुपदी है ?

$\frac{1}{x}$ एक ऋणात्मक पूर्ण घातांक ($\frac{1}{x} = x^{-1}$) है।

$\therefore$ $2x + 1 + \frac{1}{x}$ बहुपदी नही है।

$$(2x^2 + x + 1) = [x \times (2x + 1)] + 1$$

1 को अलग लेकर शेष बहुपदी को कोई दो बहुपदी के गुणा के रूप में लिख सकते है।

यहाँ $(2x + 1)$ एक भागफल और x भाज्य 1 शेष है। चूंकि शेष 0 नही है इसलिए , 'x' $2x^2 + x + 1$ का खण्ड नही होगा।

इन्हें हल कीजिए :

1. $3y^3 + 2y^2 + y$ को 'y' से भाग दीजिए।
2. $4p^2 + 2p + 2$ को '$2p$' से भाग दीजिए।

उदाहरण-6. $3x^2 + x - 1$ को $x + 1$ से भाग दो।

हल : $p(x) = 3x^2 + x - 1$ $q(x) = x + 1$.

$p(x)$ को $q(x)$ से भाग देने पर

क्रम 1 : $\frac{3x^2}{x} = 3x$, भागफल का पहला पद

क्रम 2 : $(x + 1)\ 3x = 3x^2 + 3x$

$3x^2 + 3x$ से $3x^2 + x$ घटाने पर $= -2x$

क्रम 3 : $\dfrac{-2x}{x} = -2$, यह भागफल का दूसरा पद होगा।

क्रम 4 : $(x + 1)(-2) = -2x - 2$,

$-2x - 1$ से घटाने पर $= 1$

क्रम 5 : यहाँ पर हम ऐक देगे क्यों कि शेष १ जो कि स्थिर पद है।

$$\begin{array}{r|l} & 3x-2 \\ \hline x+1 & 3x^2+x-1 \\ & 3x^2+3x \\ & -\quad - \\ \hline & \quad -2x-1 \\ & \quad -2x-2 \\ & \quad +\quad + \\ \hline & \quad\quad +1 \\ \hline \end{array}$$

यहाँ पर भागफल $(3x - 2)$ शेषफल $(+1)$ है।

Note : भाग विधी तब पूरी होगी जब शेषफल ० या शेषफल का घात भाजक के घात से कम हो।

$3x^2 + x - 1 = (x + 1)\ (3x - 2) + 1$

भाजक = (भाज्य × भागफल) + शेष.

यदि हम x को -1 के स्थान पर लगाने पर

$p(x) = 3x^2 + x - 1$

$= 3(+1) + (-1) - 1 = 1.$

यह देखा गया है कि $p(-1)$ शेष '1' के समान होता है।

तो $p(x) = 3x^2 + x - 1$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर शेषफल जो $p(-1)$ के बराबर है $x + 1$. $x = -1$.

उदाहरण-7. $2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ को $(x - 1)$ से भाग दो। शेषफल की जाँच कीजिए। (divisor) भाजक के शून्य मूल्य से जाँच कीजिए की शेषफल की।

$$\begin{array}{r|l} & 2x^3-2x^2-2x-5 \\ \hline x-1 & 2x^4-4x^3-3x-1 \\ & 2x^4-2x^3 \\ & -\quad + \\ \hline & \quad -2x^3-3x-1 \\ & \quad -2x^3+2x^2 \\ & \quad +\quad - \\ \hline & \quad\quad -2x^2-3x-1 \\ & \quad\quad -2x^2+2x \\ & \quad\quad +\quad - \\ \hline & \quad\quad\quad -5x-1 \\ & \quad\quad\quad -5x+5 \\ & \quad\quad\quad +\quad - \\ \hline & \quad\quad\quad\quad -6 \\ \hline \end{array}$$

हल : मान लो $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

x को किससे गुणा करे कि $2x^4$ आ जाए। .

$$\frac{2x^4}{x} = 2x^3$$

$(x - 1)\ (2x^3) = 2x^4 - 2x^3$

पहले शेषफल का पहला पद $- 2x^3$

यहाँ भागफल $2x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ तथा शेष -6 है।

यहाँ बहुपदी का शून्य $(x - 1)$ है।

$x = 1$ in $f(x)$, $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

$$f(1) = 2(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$$
$$= 2(1) - 4(1) - 3(1) - 1$$
$$= 2 - 4 - 3 - 1$$
$$= -6$$

बहुपदी $f(x)$ का शेषांक ० $(x - 1)$ पर प्राप्त होगा।

शेषांक प्रमेय Remainder Theorem :

मान लीजिए $p(x)$ एक से अधिक या एक के बराबर घात वाला एक बहुपद है और मान लीजिए 'a' कोई वास्तविक संख्या है। यदि $p(x)$ को रैखिक बहुपद $(x - a)$, से भाग दिया जाए तो शेष $p(a)$ होता है।

उपपत्ति: मान लीजिए $p(x)$ एक या एक से अधिक वाला एक बहुपद है मान लो कि जब $p(x)$ को $x - a$ से भाग दिया जाए तो भागफल $q(x)$ होता है और शेषफल $r(x)$ होता है अर्थात् -

यदि $p(x)$ एक बहुपदीय फलन है जिसका घातांक ≥ 3 है। तथा यदि $r\varepsilon R$ तो सभी x के लिए बहुपदीय फलन $p(x)$ इस प्रकार रहता है।

$$p(x) = g(x) . q(x) + r(x)$$

$$\therefore \quad p(x) = (x - a) . q(x) + r(x) \qquad \because g(x) = (x - a)$$

यदि p तथा g बहुपद व्यंजक हों तो p एक खण्ड होता है कि g का। यदि कोई बहुपद Q इस प्रकार है कि समीकरण $g = p. Q$ एक इकाई हो। कभी-कभी $p(x)$ गुणांक के साधारण निरीक्षण से दिए गए व्यंजक के कुछ गुणन खण्ड प्राप्त होते हैं।

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + \mathrm{K}$$

यदि $x = a$, तो $p(a) = (a - a)\, q(a) + \mathrm{K}$

$$= 0 + \mathrm{K}$$
$$= \mathrm{K}$$

आइए हम इस परिणाम को एक अन्य उदाहरण पर लागू करें।

उदाहरण-8. $x^3 + 1$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर प्राप्त शेष ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $p(x) = x^3 + 1$

रैखिक बहुपद $x + 1$ का शून्यक $-1\, [x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1]$

बहुपद में x के स्थान पर -1 रखने पर

$$p(-1) = (-1)^3 + 1$$
$$= -1 + 1$$
$$= 0$$

शेषफल प्रमेय द्वारा $(x^3 + 1)$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर -

क्या $x + 1$, $x^3 + 1$ का खण्ड है ?

उदाहरण-9. क्या $(x - 2)$ दिए गए बहुपदी का खण्ड होगा? बहुपद $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$

हल: $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$

क्या $(x - 2)$ इस बहुपदी का खण्ड होगा ?

x को ज्ञात करने के लिए $(x - 2)$ $x - 2 = 0$ $\Rightarrow x = 2.$

$$p(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 4$$
$$= 8 - 2(4) - 10 + 4$$
$$= 8 - 8 - 10 + 4$$
$$= -6.$$

शेष, शून्य न हो तो $(x - 2)$ दिए गए बहुपदी $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ का खण्ड नही होगा।

उदाहरण 10. $p(y) = 4y^3 + 4y^2 - y - 1$ $(2y + 1)$ का गुणांक होगा चेक कीजिए।

हल : $p(y)(2y + 1)$ का गुणांक हो तो $(2y + 1)$ $p(y)$ का पूर्ण विभाजित करेगा।

$2y + 1 = 0$ i.e., $y = \dfrac{-1}{2}$,

$p(y)$ में y के स्थान पर $\frac{-1}{2}$ लगाने पर

$$p\left(\frac{-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) - 1$$

$$= 4\left(\frac{-1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{-1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1$$

$$= 0$$

अतः $(2y + 1)$ $p(y)$ का खण्ड होगा।

अर्थात् $(2y + 1)$ $p(y)$ का गुणांक है।

उदाहरण-11. यदि बहुपद $ax^3 + 3x^2 - 13$ और $2x^3 - 5x + a$ $(x - 2)$ से भाग देने पर समान शेष होगा तो a का मूल्य ज्ञात करो।

हल : मान लो $p(x) = ax^3 + 3x^2 - 13$ और $q(x) = 2x^3 - 5x + a$

$\because$ $p(x)$ और $q(x)$ $x - 2$ से विभाजित करने पर समान शेषफल आता है।

$\therefore$ $p(2) = q(2)$

$$a(2)^3 + 3(2)^2 - 13 = 2(2)^3 - 5(2) + a$$

$$8a + 12 - 13 = 16 - 10 + a$$

$$8a - 1 = a + 6$$

$$8a - a = 6 + 1$$

$$7a = 7$$

$$a = 1$$

अभ्यास- 2.3

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को निम्न से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो।
   (i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x + \pi$
   (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - px^2 + 6x - p$ को $x - p$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो।

3. $2x^2 - 3x + 5$ को $2x - 3$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो? क्या यह पूर्ण रूप से विभाजित करता है? कारण बताओ ?

4. $9x^3 - 3x^2 + x - 5$ को $x - \frac{2}{3}$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो।

5. $2x^3 + ax^2 + 3x - 5$ और $x^3 + x^2 - 4x + a$ को $x - 2$ से विभाजित करने पर प्राप्त शेषांक समान हो तो a का मूल्य ज्ञात करो।

6. $x^3 + ax^2 + 5$ और $x^3 - 2x^2 + a$ को $(x + 2)$ से विभाजित करने पर समान शेष आता हो तो a का मूल्य ज्ञात करो।

7. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ को $g(x) = x - 2$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो और भाग पद्धति से उत्तर की जाँच करो।

8. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 3$ को $g(x) = 1 - 2x$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो।

9. बहुपदी $2x^3 + 3x^2 + ax + b$ को $(x - 2)$ से विभाजित करने पर शेष 2 आता है $(x + 2)$ से विभाजित करने पर शेष -2 आता है तो a और b का मूल्य ज्ञात करो।

2.6 बहुपदी व्यंजकों का गुणन खंडन :

$q(x)$ एक बहुपद $p(x)$ को पूर्ण रूप से विभाजित करता है और शेष ० है। इस प्रकार $q(x)$ $p(x)$ का खण्ड होगा।

उदाहरण : यदि $p(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ को $g(x) = 2x + 1$, से विभाजित करने पर शेष शून्य रहता है।

$4x^3 + 4x^2 - x - 1 = q(x)\,(2x + 1) + 0$

$p(x) = q(x)\,(2x + 1)$

$g(x) = 2x + 1$ $p(x)$ का खण्ड है।

शेषांक प्रमेय की सहायता से बहुपद के खण्ड ज्ञात कर सकते है।

गुणन खण्ड प्रमेय: यदि $p(x)$ की घात $n \geq 1$ 'a' कोई वास्तविक संख्या हो तो (i) $x - a$, $p(x)$ का खण्ड है। $p(a) = 0$ (ii) यदि $(x - a)$ बहुपद $p(x)$ का खण्ड हो तो $p(a) = 0$.
साधारण उपपति इस प्रमेय की हम देखेगें।

उपपति: शेषांक प्रमेय से

$p(x) = (x - a)\ q(x) + p(a)$

$p(a) = 0$ तो $p(x) = (x - a)\,q(x) + 0.$

$= (x - a)\,q(x)$

यह दर्शाता है कि $p(x)$ का खण्ड $(x-a)$ है .

अतः सिद्ध है।

(ii) दूसरे केस केस में $(x-a)\,p(x)$, का खण्ड हो तो $p(x) = (x-a)\,q(x)$ कोई बहुपद $q(x)$ के लिए

$$\therefore \; p(a) = (a-a)\,q(a)$$

$$= 0$$

$\therefore\; p(a) = 0$ यदि $(x-a)$ का खण्ड $p(x)$ हो।

उदाहरण-12. $x+2$ व्यंजक $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ का खण्ड है या नहीं जाँच कीजिए।

हल: मान लो $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

$$g(x) = x + 2$$

$g(x)$ का शून्य मूल्य $= -2$

$$p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) + 6$$

$$= -8 + 2(4) - 6 + 6$$

$$= -8 + 8 - 6 + 6$$

$$= 0$$

गुणन खण्ड प्रमेय द्वारा $x+2$, $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ का खण्ड होगा।

उदाहरण-13. यदि बहुपद $2x^3 - 9x^2 + x + K$ का खण्ड $2x - 3$ हों तो K का मूल्य ज्ञात करो।

हल: $(2x-3)$ एक खण्ड है $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + K$ का

यदि $(2x-3) = 0,\; x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ तो $(2x-3)$ का शून्य $\frac{3}{2}$

तो $(2x-3)\,p(x)$ का खण्ड होगा $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

$$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + K,$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + K = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} + K = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + \text{K} = 0\right) \times 4$$

$$27 - 81 + 6 + 4\text{K} = 0$$

$$-48 + 4\text{K} = 0$$

$$4\text{K} = 48$$

$$\text{K} = 12$$

उदाहरण-14. $x^{10} - 1$ का खण्ड $(x - 1)$ है। और $x^{11} - 1$ का भी

हल : मान लो $p(x) = x^{10} - 1$ और $g(x) = x^{11} - 1$

$(x - 1)$ $p(x)$ और $g(x)$ का खण्ड हो तो $p(1) = 0$ $g(1) = 0$ होगा

$p(x) = x^{10} - 1$	$g(x) = x^{11} - 1$
$p(1) = (1)^{10} - 1$	$g(1) = (1)^{11} - 1$
$= 1 - 1$	$= 1 - 1$
$= 0$	$= 0$

कोशिश कीजिए

x^n - 1का खण्ड है $(x - 1)$

गुणन खण्ड प्रमेय द्वारा,

$p(x)$ और $g(x)$ का खण्ड $(x - 1)$ है।

एक द्वि बहुपदी $ax^2 + bx + c$ का खण्ड ज्ञात करना $a \neq 0$ a, b, c स्थिरांक है।

मान लो खण्ड $(px + q)$ और $(rx + s)$ है

तो $ax^2 + bx + c = (px + q)\ (rx + s)$

$$= prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

x^2, x और स्थिरांक के गुणको का तुलनात्मक अध्ययन करने पर-

$$a = pr$$

$$b = ps + qr$$

$$c = qs$$

b दो संख्याओं ps और qr का योग है।

$(ps)\ (qr) = (pr)(qs) = ac$

$ax^2 + bx + c$, का खण्ड करने के लिए $b =$ दो संख्याओं का योग और जिस गुणनफल $= ac$.

उदाहरण-15. $3x^2 + 11x + 6$ के गुणन खण्ड ज्ञाच कीजिए

हल : यदि p और q दो खण्ड होंगे तो है $p + q = 11$ और $pq = 3 \times 6 = 18$, तो हमारे खण्ड 18 के खण्ड होगे

$(1, 18), (2, 9), (3, 6)$ इनमें से 2 और 9 एसी संख्याएँ है $p + q = 11$

$$3x^2 + 11x + 6 = 3x^2 + 2x + 9x + 6$$
$$= x(3x + 2) + 3(3x + 2)$$
$$= (3x + 2)(x + 3).$$

इसे हल कीजिए:

खण्डो में विभाजन कीजिए -

1. $6x^2 + 19x + 15$ 2. $10m^2 - 31m - 132$ 3. $12x^2 + 11x + 2$

उदाहरण-16. $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ $x^2 - 3x + 2$ से विभाजित है या नही।

गुणन खण्ड प्रमेय द्वारा इसे कैसे सिद्ध करोगे?

हल: भाजक (divisor) एक रैखिक बहुपदी नही है यह द्वि बहुपदी (quadratic) है।

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$$
$$= x(x - 2) - 1(x - 2)$$
$$= (x - 2)(x - 1).$$

$2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ का खण्ड $x^2 - 3x + 2$ हो तो $(x - 2)$ और $(x - 1)$ भी $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ के खण्ड होंगे।

मान लो $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$

$$p(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$$
$$= 2(16) - 6(8) + 3(4) + 6 - 2$$
$$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$$
$$= 50 - 50$$
$$= 0$$

$p(2) = 0$, $(x-2)$ एक $p(x)$ का खण्ड है

$$\begin{aligned} p(1) &= 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2 \\ &= 2(1) - 6(1) + 3(1) + 3 - 2 \\ &= 2 - 6 + 3 + 3 - 2 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$p(1) = 0$, $(x-1)$ $p(x)$ का खण्ड है

$(x-2)$ और $(x-1)$ $p(x)$ के खण्ड हो तो $x^2 - 3x + 2$ भी $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ का खण्ड होगा।

उदाहरण-17. $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ का खण्डो में विभाजन कीजिए।

- $(x-y) \mid (x^n - y^n)$, सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए
- $(x+y) \mid (x^n - y^n)$, जहाँ n सम
- $(x+y) \mid (x^n + y^n)$, जहाँ n रूढ़ है
- $(x-y) \nmid (x^n + y^n)$, सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए

हल : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

$p(1) = 0$ (जाँच कीजिए)

$(x-1)$ $p(x)$ का खण्ड है।

यदि हम $p(x)$ को $(x-1)$ से विभाजित करने पर $x^2 - 22x + 120$.

दूसरी विधि

$$\begin{aligned} x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120 \\ &= x^2(x-1) - 22x(x-1) + 120(x-1) \quad \text{(क्यों?)} \\ &= (x-1)(x^2 - 22x + 120) \end{aligned}$$

$x^2 - 22x + 120$ एक द्वि बहुपदी है।

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x-12) - 10(x-12) \\ &= (x-10)(x-12) \end{aligned}$$

$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x-1)(x-10)(x-12)$.

अभ्यास - 2.4

1. $(x + 1)$ किस बहुपदी का एक खण्ड होगा।

(i) $x^3 - x^2 - x + 1$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

(iii) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (3 - \sqrt{3})\, x + \sqrt{3}$

2. गुणनखण्ड प्रमेय द्वारा बताओ कि g(x) $f(x)$ का खण्ड है या नही।

(i) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 5x - 1, \ g(x) = x + 1$

(ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \ g(x) = x + 1$

(iii) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, \ g(x) = x - 2$

(iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12, \ g(x) = 3x - 2$

(v) $f(x) = 4x^3 + 20x^2 + 33x + 18$, g(x) $= 2x + 3$

3. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ बहुपदी के खण्ड $(x - 2)$, $(x + 3)$ और $(x - 4)$ है ?

4. $x^3 - 6x^2 - 19x + 84$ बहुपदी के खण्ड $(x + 4)$, $(x - 3)$ और $(x - 7)$ है ?

5. यदि $px^2 + 5x + r$ के खण्ड $(x - 2)$ और $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ हो तो बताओ $p = r$.

6. यदि $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ के खण्ड $(x^2 - 1)$ हो तो सिद्ध करो $a + c + e = b + d = 0$

7. खण्डो में विभाजित कीजिए। (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $y^3 + y^2 - y - 1$

8. $ax^2 + bx + c$ और $bx^2 + ax +$ c का उभयनिष्ठ खण्ड $x + 1$ हो तो बताओ $c = 0$ तथा $a =$ b होगा।

9. यदि $x^2 - x - 6$ और $x^2 + 3x + 18$ का उभयनिष्ठ खण्ड $(x - a)$ हो तो a का मूल्य ज्ञात करो।

10. $y^3 - 2y^2 - 9y + 18$ का खण्ड $(y - 3)$ हो तो शेष 2 खण्ड ज्ञात करो।

2.7 बीजगणितीय सर्व समिकाएँ (Algebraic Identities) :

बीजगणितीय सर्व समिका एक बीजीय समीकरण होती है जो कि चरो के सभी मानो के लिए सत्य होती है।

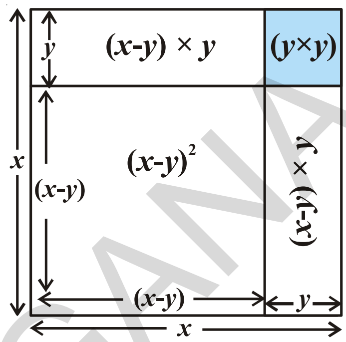
समीकरण I : $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

समीकरण II : $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$

सर्व समिका III : $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

सर्व समिका IV : $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab.$

रेखा गणितिय उपपत्ति :



सर्व समिका $(x - y)^2$

क्रम-I एक x भुजा वाला वर्ग बनाओ

क्रम-II y लम्बाई x से धटाने पर

क्रम-III $(x - y)^2$

$= x^2 - [(x - y)y + (x - y)y + y^2]$

$= x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2$

$= x^2 - 2xy + y^2$

प्रयत्न कीजिए :

दूसरी सर्व समिकाओ के लिए रेखागणितीय चित्र बनाइए।

(i) $(x+y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $(x+y)(x-y) \equiv x^2 - y^2$

(iii) $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

इन्हें हल कीजिए :

सूत्रों की सहायता से गुणा कीजिए।

(i) $(x + 5)(x + 5)$ (ii) $(p - 3)(p + 3)$ (iii) $(y - 1)(y - 1)$

(iv) $(t + 2)(t + 4)$ (v) 102×98

उदाहरण-18. खण्डो में विभाजन कीजिए

(i) $x^2 + 5x + 4$ (ii) $9x^2 - 25$

(iii) $25a^2 + 40ab + 16b^2$ (iv) $49x^2 - 112xy + 64y^2$

हल:

(i) $x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4 + 1)x + (4)(1)$

सर्वसमिका का तुलनात्मक अध्ययन करने पर $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

$(x + 4)(x + 1).$

(ii) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2$

सर्वसमिका III का तुलनात्मक अध्ययन करने पर

$x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$

$\therefore 9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5).$

(iii) $25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a)^2 + 2(5a)(4b) + (4b)^2$

इस समीकरण को $x^2 + 2xy + y^2$ से तुलना करने पर

$x = 5a$ and $y = 4b$

सर्व समिका I, $\mathbf{(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2}$

$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a + 4b)^2$

$= (5a + 4b)(5a + 4b).$

(iv) $49x^2 - 112xy + 64y^2$

$49x^2 = (7x)^2, \quad 64y^2 = (8y)^2$

$112\,xy = 2(7x)(8y)$

सर्व समिका II से तुलना करने पर

$\mathbf{(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2,}$

$49x^2 - 112xy + 64y^2 = (7x)^2 - 2(7x)(8y) + (8y)^2$

$= (7x - 8y)^2$

$= (7x - 8y)(7x - 8y).$

इन्हें हल कीजिए :

उचित सर्वसमिका का प्रयोग कर खण्डो में विभाजित कीजिए।

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{y^2}{9}$

(iii) $t^2 - 2t + 1$ (iv) $x^2 + 3x + 2$

अभी तक द्विपदी सर्वसमिकाओं को देखा।अब हम त्री पदी $x + y + z$ सर्व समिका को हल करेंगे। $(x + y + z)^2$ का परिकलन कीजिए।

मान लो $x + y = t$, तो $(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + z^2$

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

पदो को क्रमागत लिखने पर $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

दूसरी विधि :

$(x+y+z)^2$ का परिकलन करने पर

$[(x+y)+z]^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)(z) + (z)^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ [सर्वसमिका (1) के द्वारा]

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

सर्वसमिका V : $(x+y+z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

उदाहरण-19. सर्व समिका की सहायता के विस्तार कीजिए $(2a+3b+5)^2$

हल : $(x+y+z)^2$ के साथ तुलनात्मक अध्ययन करने पर

$x = 2a,\ y = 3b$ और $z = 5$

सर्व समिका V प्रयोग कर

$(2a+3b+5)^2 = (2a)^2 + (3b)^2 + (5)^2 + 2(2a)(3b) + 2(3b)(5) + 2(5)(2a)$

$= 4a^2 + 9b^2 + 25 + 12ab + 30b + 20a.$

उदाहरण-20. $(5x-y+z)(5x-y+z)$ (गुणनफल ज्ञात कीजिए)

हल : $(5x-y+z)(5x-y+z) = (5x-y+z)^2$

$= [5x + (-y) + z]^2$

$\mathbf{(x+y+z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx,}$

$(5x + (-y) + z)^2 = (5x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(5x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(5x)$

$= 25x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 2yz + 10zx.$

उदाहरण-21. $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$ का खण्डो में विभाजन कीजिए।

हल :

$4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$

$= [(2x)^2 + (-3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(-3y)(5z) + 2(5z)(2x)]$

सर्व समिका V से तुलना करने पर

$$(x+y+z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

$$= (2x-3y+5z)^2$$

$$= (2x-3y+5z)\,(2x-3y+5z).$$

इन्हें हल कीजिए

(i) $(p+2q+r)^2$ का विस्तार कीजिए

(ii) $(4x-2y-3z)^2$ का विस्तार सर्वसमिका के प्रयोग द्वारा कीजिए।

(iii) $4a^2+b^2+c^2-4ab+2bc-4ca$ सर्व समिका के प्रयोग द्वारा खण्डों मे विभाजन कीजिए।

सर्व समिका I का प्रयोग कर $(x+y)^3$ को विस्तार कीजिए।

$$(x+y)^3 = (x+y)^2\,(x+y)$$

$$= (x^2+2xy+y^2)\,(x+y)$$

$$= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)$$

$$= x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3$$

$$= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$= x^3+3xy\,(x+y)+y^3$$

$$= x^3+y^3+3xy(x+y).$$

सर्वसमिका VI : $(x+y)^3 \equiv x^3+y^3+3xy\,(x+y).$

प्रयत्न कीजिए

बिना गुणा किए $(x-y)^3$ का मूल्य ज्ञात करो

गुणा करके जाँच कीजिए।

सर्वसमिक VII : $(x-y)^3 \equiv x^3-y^3-3xy\,(x-y).$

$$\equiv x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

उदाहरण-22. निम्न का विस्तार कीजिए -

(i) $(2a+3b)^3$ (ii) $(2p-5)^3$

हल : दिए गए समीकरण को $(x+y)^3$ से तुलना करने पर $x = 2a \quad y = 3b$

$$(2a+3b)^3 = (2a)^3 + (3b)^3 + 3(2a)(3b)\,(2a+3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 18ab\,(2a+3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54\,ab^2$$
$$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$$

(ii) दिए गए समीकरण को $(x-y)^3$ से तुलना करने पर $x = 2p$ तथा $y = 5$ होगा

सर्व समिका VII का प्रयोग कर

$$(2p-5)^3 = (2p)^3 - (5)^3 - 3(2p)(5)\,(2p-5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 30p\,(2p-5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 60p^2 + 150p$$
$$= 8p^3 - 60p^2 + 150p - 125.$$

उदाहरण-23. उचित सर्व समिका का प्रयोग कर हल कीजिए।

(i) $(103)^3$ (ii) $(99)^3$

हल : $(103)^3 = (100+3)^3$

$$(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$
$$= (100)^3 + (3)^3 + 3(100)\,(3)\,(100+3)$$
$$= 1000000 + 27 + 900(103)$$
$$= 1000000 + 27 + 92700$$
$$= 1092727.$$

(ii) $(99)^3 = (100-1)^3$

$$(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$
$$= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)\,(100-1)$$
$$= 1000000 - 1 - 300\,(99)$$
$$= 1000000 - 1 - 29700$$
$$= 970299.$$

उदाहरण-24. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ का खण्डो में विभाजन

हल : दिए गए समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2\,(3y) + 3(2x)\,(3y)^2 + (3y)^3$$

सर्व समिका VI से तुलना करने पर

सूत्र- $(x+y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$,

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x+3y)^3$$

$= (2x+3y)\,(2x+3y)\,(2x+3y)$ गुणनखंड प्राप्त होंगे।

कीजिए

1. $(x+1)^3$ विस्तृत कीजिए
2. $(3m-2n)^3$.
3. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ का खण्डो में विभाजन

$$(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$= x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$= x^3 + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - xyz - \cancel{x^2z} + \cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - \cancel{y^2z} - xyz + \cancel{x^2z} + \cancel{y^2z} + z^3 - xyz - \cancel{yz^2} - \cancel{xz^2}$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

सर्व समिका VIII: $(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) \equiv x^3+y^3+z^3-3xyz$

उदाहरण-25.

$$(2a+b+c)\,(4a^2+b^2+c^2-2ab-bc-2ca)$$

हल : इसके गुणनफल को इस प्रकार लिखा जाता है।

$$= (2a+b+c)\,[(2a)^2 + b^2 + c^2 - (2a)(b) - (b)(c) - (c)\,(2a)]$$

सर्व समिका VIII से तुलना करने पर

$(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \;\equiv\; x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (2a)^3 + (b)^3 + (c)^3 - 3(2a)\,(b)\,(c)$

$= 8a^3 + b^3 + c^3 - 6abc$

उदाहरण-26. $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ का खण्डो में विभाजित कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है।

$a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc = (a)^3 + (-2b)^3 + (-4c)^3 - 3(a)(-2b)(-4c)$

VIII सर्व समिका से तुलना करने पर

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

खण्ड प्राप्त होगे

$= (a - 2b - 4c)\,[(a)^2 + (-2b)^2 + (-4c)^2 - (a)\,(-2b) - (-2b)\,(-4c) - (-4c)\,(a)]$

$= (a - 2b - 4c)\,(a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 2ab - 8bc + 4ca).$

इन्हें हल कीजिए

1. बिना गुणा किए हल करो
   $(a - b - c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc - ca)$
2. सर्व समिका का प्रयोग कर खण्डों में विभाजन $27a^3 + b^3 + 8c^3 - 18abc$

उदाहरण-27. $2x^2 + 9x - 5$ एक आयत का क्षेत्रफल है उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करो।

हल : मान लो आयत की लम्बाई l चौड़ाई b

आयत का क्षेत्रफल $= 2x^2 + 9x - 5$

$lb = 2x^2 + 9x - 5$

$= 2x^2 + 10x - x - 5$

$= 2x(x + 5) - 1(x + 5)$

$= (x + 5)\,(2x - 1)$

$\therefore$ लम्बाई $= (x + 5)$

चौड़ाई $= (2x - 1)$

$x = 1, \quad l = 6, \quad b = 1$

$x = 2, \quad l = 7, \quad b = 3$

$x = 3, \quad l = 8, \quad b = 5$

....

....

अभ्यास - 2.5

1. सही सर्व समिकाओ का प्रयोग कर निम्न को हल कीजिए।

(i) $(x + 5)(x + 2)$ (ii) $(x - 5)(x - 5)$ (iii) $(3x + 2)(3x - 2)$

(iv) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ (v) $(1 + x)(1 + x)$

2. बिना गुणा किए हल कीजिए।

(i) 101×99 (ii) 999×999 (iii) $50\frac{1}{2} \times 49\frac{1}{2}$

(iv) 501×501 (v) 30.5×29.5

3. सही सर्व समिकाओ के प्रयोग से खण्डो को ज्ञात करो।

(i) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$

(iii) $4x^2 - \frac{y^2}{25}$ (iv) $18a^2 - 50$

(v) $x^2 + 5x + 6$ (vi) $3p^2 - 24p + 36$

4.

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $(-2a + 5b - 3c)^2$

(iv) $\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 1\right)^2$ (v) $(p + 1)^3$ (vi) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

5. खण्डो में विभाजित कीजिए।

(i) $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz$

(ii) $9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 12ab - 16bc - 24ca$

6. $a+b+c=9$ और $ab+bc+ca=26$, तो $a^2+b^2+c^2$ का मूल्य ज्ञात करो।

7. हल करो

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$ (iv) $(1001)^3$

8. खण्डो में विभाजन

(i) $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$ (ii) $8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2$

(iii) $1-64a^3-12a+48a^2$ (iv) $8p^3-\frac{12}{5}p^2+\frac{6}{25}p-\frac{1}{125}$

9. सिद्ध करो

(i) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(ii) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

10. खण्डो में विभाजन कीजिए।

(i) $27a^3+64b^3$

(ii) $343y^3-1000$

11. $27x^3+y^3+z^3-9xyz$ खण्डो में विभाजन कीजिए।

12. $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$

13. यदि $x+y+z=0$, हो तो सिद्ध कीजिए $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

14. घनो का मूल्य ज्ञात किए बिना हल कीजिए

(i) $(-10)^3+(7)^3+(3)^3$ (ii) $(28)^3+(-15)^3+(-13)^3$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3$ (iv) $(0.2)^3-(0.3)^3+(0.1)^3$

15. निम्न समीकरण में क्षेत्रफल दिए गए हो तो उनकी लम्बाई, चौड़ाई (l,b) ज्ञात कीजिए।

(i) $4a^2+4a-3$ (ii) $25a^2-35a+12$

16. घनाभ के आयतन दिए गए हो तो घनाभ की भुजा ज्ञात करो।

(i) $3x^3-12x$ (ii) $12y^2+8y-20$.

17. यदि $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$, तो सिद्ध करो $a=b$ होगा ।

हमने क्या सीखा?

निम्न अंश इस अध्याय में बताए गए है।

1. एक चार वाला बहुपद $p(x)$ निम्न रूप का x में एक बीजीय व्यंजक है :

   $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1 x + a_0$, जहाँ $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ अचर है और $x^0, x^1, x^2, ... x^n$ के गुणांक है और n को बहुपद की धात कहा जाता हैं। प्रत्येक a_nx^n ; $a_{n-1}x^{n-1}$; .... a_0 जहाँ $a_n \neq 0$ को बहुपद $p(x)$ का पद कहा जाता है।

2. एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहा जाता है।
3. दो पद वाले बहुपद को द्विपद कहा जाता है।
4. तीन पदो वाले बहुपद को त्रिपद कहा जाता है।
5. एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहा जाता है।
6. दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहा जाता है।
7. तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद
8. वास्तवीक संख्या 'a' बहुपद $p(x)$ का शून्य होता है यदि $p(a) = 0$ हो।
9. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता है। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं है और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।
10. शेषांक प्रमेय - यदि $p(x)$, एक या एक से अधिक घातांकों वाला एक बहुपद हो, $p(x)$ को रैखिक बहुपद x-a से भाग दिया गया हो तो, शेष $p(a)$ होता है।
11. गुणन खण्ड प्रमेय :

    यदि $p(a) = 0$ हो, तो x-a बहुपद का एक गुणनखंड है और यदि $p(x)$, का एक गुणनखंड x-a हो तो $p(a) = 0$ होता है।

(i) $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

(ii) $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

(iii) $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

(iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ also

(v) $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(vi) $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

दिमागी उलझन

यदि $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}$ तो

x का मूल्य क्या होगा ?

03

ज्यामितीय घटक

(The Elements of Goemetry)

3.1 परिचय

आपने बड़े निर्माण जैसे बाँध, पाठशालाओं के भवन, हॉस्टेल, अस्पताल आदि देखे होंगे ऐसे बड़े निर्माण इंजिनियरों के लिए बड़ी चुनौती खड़े करते हैं।

क्या आप जानते है निर्माण कार्य का मूल्य कैसे निर्धारित करते हैं। मज़दूरों की मज़दूरी के अलावा, सिमेंट का मूल्य, कांक्रेट आदि उसके आकार तथा परिमाण पर आधारित होते हैं।

भवन का आकार तथा परिमाण में उसके आधार, चारों ओर का क्षेत्रफल, दिवारों का परिमाण, झुकाव, छत आदि को सम्मिलित करते हैं। निर्माण कार्य में समावेशित ज्यामितीय सिद्धान्त को समझने के लिए हमें ज्यामिति के आधार भूत घटकों का उपयोग समझना आवश्यक है।

हमें ज्ञात है कि ज्यामिति का हमारे दैनिक जीवन में सर्वाधिक उपयोग होता है जैसे रंग-रोगन, कुटिर कार्य, फर्श बिछाना खेतों में हल चलाना बीज बोना आदि। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि ज्यामिति के बिना जीवन की कल्पना ही नहीं हो सकती।

कुछ अद्‌भूत निर्माण जैसे इजिप्ट के पिरामीड (Pyramids in Egypt), चीन की अद्वितीय दिवार (Great wall of China), मंदिर (Temples), मस्जिद (Mosques), गिरिजाघर, ताजमहल (Tajmahal), चारमीनार (Charminar), भारत के अल्तार (altars in India), फ्रांस का इफेल टावर (Eifel tower of France) आदि। ज्यामितीय उपयोगिता के कुछ उदाहरण है।

इस अध्याय में हम इसके इतिहास को जानेंगे। ज्यामिति के अनेक विचारों को आजकल के विकसित ज्यामिति के साथ तुलना करेंगे।

3.2 इतिहास

गणित की वह शाखा जो निर्माणों के आकार तथा परिमाण को ज्यामिति के अंतर्गत परिभाषित करती है। *ज्यामिति* शब्द का अवर्भाव ग्रीक शब्द जियो 'geo' अर्थात पृथ्वी और मीटरीन 'metrein' अर्थात् मापन से हुआ है।

सर्वप्रथम ज्यामिति की शुरुआत प्राचिन लोगों की खोज जिसने अधिक कोण त्रिभुज को प्राचिन सिंधु घाटी तथा प्राचिन बेबिलोनिया (Babylonia) से हुई है। 'बकशाली लिपि' 'Bakshali manuscript' में ज्यामितीय प्रश्नों का सर्वाधिक उपयोग किया गया है। बिन आकार वाली ठोस वस्तु का आयतन जैसे कई उदाहरण उसमें प्राप्त होते हैं। ज्यामितिय ज्ञान के कुछ अवशेष सिंधु घाटी सभ्यता की खुदाई जो - 2500

ईसा पूर्व हरप्पा (Harappa) तथा मोहनजोदाडो (Mohenjo-Daro) में की गई थी उसमें वृत्त आकार वाले कुछ वस्तुएँ पाई गयी थी।

वैदिक यज्ञ के हवन कुण्ड के निर्माण उपयोगी ज्यामितीय सिद्धान्तों की सूचि हमें वैदिक संस्कृती के 'सुलभ सूत्रों' 'Sulba Sutras' में प्राप्त होते हैं। हवन कुण्डों के निर्माण के पिछे एक अद्भुत कला जो एक समान क्षेत्रफल वाले अनेक आकार होते हैं। आठवीं शताब्दी ईसा पूर्व बुधायन ने बौद्धायन सुलभ सूत्र को बनाया जो सर्वाधिक प्रचलित सुलभ सूत्र है जिसमें पायथोगोरस की त्रिसंखीय पद्धति (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17).....आदि उदाहरण पाये गये है। साथ ही साथ आयत के भुजाओं के लिए पायथोगोरस सिद्धान्त के लिए कथन दिये गये हैं।

प्राचीन ग्रीक गणितज्ञ ने ***ज्यामिति*** की कल्पना कुछ इस प्रकार की है कि यह सभी विज्ञानों का ताज है। उन्होंने ज्यामिति का विस्तार अनेक नये चित्रों, चापों, तलों तथा ठोसों द्वारा की है। उन्होंने जाना कि कुछ कथनों की वैशिक सत्यता तर्कों के आधार पर स्थापित करना आवश्यक है। इस विचार ने ग्रीक गणितज्ञ थेल्स (Thales) को निगमन प्रणाली की सिद्धता के बारे में सोचने के लिए प्रेरित किया।

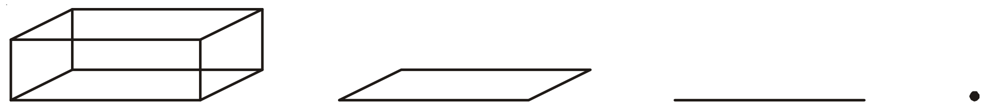
युनान के पायथोगोरस शायद थेल्स के शीष्य होते और उनका प्रमेय भी शायद उनके नाम पर नहीं होता लेकिन वे एक ऐसे गणितज्ञ है जिन्होंने निगमन प्रणाली को सिद्ध किया। इजिप्त में एलेक्जेंडेरिया के युक्लीद (325-265B.C) ने 'तत्वों' पर 13 पुस्तकें लिखी। इसलिए युक्लीद ने प्रथम मूलभूत सिद्धान्तों पर आधारित परिभाषायें, स्वयं तथ्य, सार्वानुपात तथा तर्कों का निर्माण किया।

3.3 युक्लीद के ज्यामितीय तत्व

युक्लीद ने कहा कि ज्यामिति उस विश्व का अमूर्त प्रतिरूप है जिसमें वे रहते है बिन्दु, तल तथा रेखा की धारणा को अपने चरों ओर दिखाई देने वाली वस्तुओं में से ही बनाया गया है। अंतरिक्ष तथा अंतरिक्ष में पाये जाने वाले ठोसों के अध्ययन से ठोस वस्तुओं के ज्यामितीय अमूर्त धारणाओं का विकास हुआ है। ठोसों में आकार, परिमाण तथा एक स्थान से दूसरे स्थान पर स्थानांतरित होने का गुण पाया जाता है। उनके किनारों को **पार्श्वतल** कहते है। वे ठोसों के भागों को एक दूसरे से अलग करते हैं। और उनमें कोई मोटाई नहीं होती है। इन तलों के **किनारें** या तो चाप या **सरल रेखा** के रूप में होते हैं। इन रेखाओं का अंतिम छोर **बिन्दु** रूप होता है। ठोसों से बिन्दु तक के चरणों का अवलोकन करो (घनाकृति-तल-रेखा-बिन्दु)।

अगले पन्ने पर दिये गये चित्रों का अवलोकन कीजिए यह एक घनाभाकार [चित्र.(i)] जो एक त्रिपरिमाणीय (three dimensions) पिंड है जिसमें लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई पायी जाती है। जिनमें से अगर कोई एक परिमाण घटता है जैसे ऊँचाई तो उसमें सिर्फ दो परिमाण शेष रहते हैं जसिसे वह आयत बनता है। आप जानते है कि आयत में दो परिमाण होते हैं लम्बाई तथा चौडाई। [चित्र.(ii)] यदि उनमें एक और परिमाण घटते हैं जो कि चौडाई जिससे इसमें सिर्फ एक रेखा खण्ड शेष रहता है [चित्र.(iii)] यदि तीसरा परिमाण भी निकाल दिया जाय तो सिर्फ बिन्दु शेष रहता है। [चित्र.(iv)] आप याद कीजिए बिन्दु का कोई

परिमाण नहीं होता हैं। उसी प्रकार जब हम टेबल के किनारों को या पुस्तक के किनारों को देखते हैं तो उसमें रेखा दिखाई देगी। रेखा का अंतिम छोर या वह स्थान जहाँ दो रेखाएँ मिलती है उसे बिन्दु कहते हैं।



(i) (ii) (iii) (iv)

घनाभीय पिंड →	तल →	रेखायें →	बिन्दु
3-D	2-D	1-D	कोई परिमाण नहीं

ये सभी ज्यामिति के मूलभूत पद है। इन पदों की सहायता से हम दूसरे पद जैसे रेखाखण्ड, कोम, त्रिभुज आदि को परिभाषित करेंगे।

उपरोक्त निरिक्षण के आधार पर युक्लीद ने बिन्दु, रेखा तथा तल को परिभाषित किया है।

युक्लीद ने अपनी 'तत्व' पुस्तक-1 में 23 परिभाषायें दि है। उनमें से कुछ यहाँ निचे दिये गये हैं।

- **बिन्दु** के कोई भाग नहीं होते हैं।
- **रेखा** एक बिना चौड़ई वाली लम्बाई हाती हैं।
- रेखा के अन्तिम छोर को बिन्दु कहते हैं।
- **सरल रेखा** एक ऐसी रेखा है जो सम बिन्दुओं का समूह होता है।
- **तल** एक ऐसा भाग है जिसमें लम्बाई और चौड़ाई होते हैं।
- तल के किनारों को रेखा कहते हैं।
- **समतल** एक ऐसा तल है जो सरल रेखा के समूह से बनता है।

युक्लीद 300 ई.पू.
ज्यामिति के जनक

युक्लीद ने अपनी परिभाषाओं में कुछ पदों का **उपयोग** किया जैसे 'भाग', 'चौडाई', 'सम', जिनको और गहराई से समझना आवश्यक है यदि हम समतल को इस प्रकार परिभाषित करें कि वह एक क्षेत्रफल है तब हमें क्षेत्रफल शब्द को फिर से समझना पड़ेगा। इसलिए एक पद को परिभाषित करने के लिए हमें अनेक अनंत पदों को श्रृंखलाबद्ध रूप से परिभाषित करना पड़ेगा। इसलिए गणितज्ञों ने उन्हें अपरिभाषित ही रखा। वैसे भी हम ज्यामितीय पद के लिए दी गई परिभाषा से हमें अनुमानिक अनुभव होता है। इसलिए हमने बिन्दु को एक डॉट (dot) से दर्शित किया जबकी उसके भी कुछ परिमाण होते है। चीन के एक प्राचीन दार्शनिक ने कहा कि "रेखा को कुछ भागों में विभाजित किया जाता है। जब वे भाग अविभाजित रह जाते हैं तब उसे बिन्दु कहते हैं"

परिभाषा 2 में भी यही समस्या खडी होती है, क्योंकि उसमें लम्बाई और चौड़ाी दी गई है जिसमें दोनों की भी परिभाषा नहीं दी गई है। इसी कारणवश आगे के विकसीत अध्ययन में कुछ पदों को अपरिभाषित रखा गया है। इसलिए ज्यामिति में हम *बिन्दु, रेखा, तथा तल (युक्लीद के शब्दों में समतल) को अपरिभाषित पद कहते है।* हम उनका भौतिक प्रतिरूप के आधार पर अनुमानिक या विस्तार रूप ही लेते हैं।

युक्लीद ने अपने ज्यामितिय गुणों को अनुमानिक रूप से परिभाषित किया है यह परिकल्पनाएँ स्वयं सिद्ध सत्य है उसे किसी प्रमाण की आवश्यकता नहीं है। ये परिकल्पनाएँ स्वसिद्ध सत्य होती है। उन्होंने उसे दो भागों में विभाजित किया स्वयंतथ्य तथा अभिगृहीत।

3.3.1 स्वयंतथ्य और अभिधारणाएँ (Axioms and Postulates)

स्वयंतथ्य (Axioms) वे कथन है जो स्वयं सिद्ध होते हैं या सत्य होने की संभावना गणितीय पद्धति द्वारा होती है। उदाहरण के लिए "एक पूर्ण संख्या उसके भागों से बड़ी होती है।" यह स्वयंसिद्ध तथ्य हैं इसे किसी प्रमाण की आवश्यकता नहीं है। यह स्वयंतथ्य "से बड़ा है" को परिभाषित करता है उदाहरण के लिए यदि P परिमाण C का भाग है तब हम C को P तथा उसके दूसरे भाग R का योगफल के रूप में दर्शाते हैं। इसे $C > P$ के रूप में सूचित किया जाता है। अर्थात् R एक मूल्य है जिसे $C = P + R$ के रूप में लिखा जाता है।

युक्लीद ने **इस साधारण धारणा या स्वयंतथ्य** को सिर्फ ज्यामिति में ही नहीं बल्कि पूर्ण गणित में उपयोग में लाया है। लेकिन पद अभिगृहित को ज्यामिति में कल्पना के स्थान पर उपयोग में लाया गया है। स्वयँ तथ्यों का ज्यामिति के विकास में मूलभूत आधार है। इन स्वयं तथ्यों का अविर्भाव अलग-अलग परिस्थितियों में हुआ है।

युक्लीद के कुछ स्वयंतथ्य इस प्रकार है।

- जब दो वस्तुएँ किसी तीसरी वस्तु के समान हो तो वे आपस में एक दूसरे के समान होती है।
- यदि समान संख्याएँ समान संख्याओं के साथ जोड़ी जाय तो उनकी पूर्ण संख्याएँ भी समान होती है।
- यदि समान संख्याएँ समान संख्याओं में से घटायी जाय तो उनका शेष समान होता है।
- वस्तुएँ जो एक दूसरे से मेल खाती है वे एक दूसरे के समान होती है।
- वस्तुएँ जो समान वस्तुओं की दुगुनी होती है। वे भी एक दूसरे के समान होती है।
- समान संख्याओं के आधे भाग भी एक दूसरे के समान होती है।

ये 'सामान्य धारणायें' किसी दूसरे प्रकार की धारणाओं का दिग्दर्शन करते हैं। पहली धारणा कुछ सामान्य चित्रों के लिए लागू होती है। उदाहरण के लिए यदि एक वस्तु A का क्षेत्रफल किसी दूसरे वस्तु B के क्षेत्रफल के समान हो तो वस्तु A, वस्तु B के समान होती है।

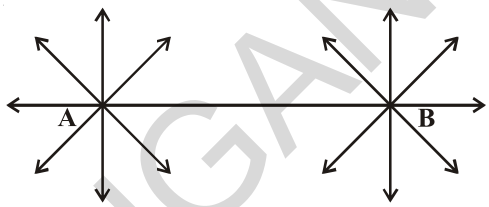
सम वस्तुओं के आकार-परिमाण की तुलना तथा योग किया जाता है लेकिन विषम वस्तुओं के आकार-परिमाण की तुलना नहीं की जा सकती। उदाहरण के लिए किसी रेखा को क्षेत्रफल के साथ नहीं जोड़ा जा सकता न हीं कोणों की तुलना पंचभुजों के साथ की जा सकती है।

प्रयत्न कीजिए

क्या आप दैनिक जीवन के स्वयंतथ्यों को बता सकते हैं।

अब हम युक्लीद के पाँच अभिगृहीतों (postulates) की चर्चा करेंगे :

1. पेपर पर दो भिन्न बिन्दु A और B लगाओ।



A और B से गुजरती हुई एक रेखा खिंचिए। A और B से गुजरती हुई हम कितनी रेखायें खींच सकते हैं? हम एक से ज्यादा रेखायें नहीं खींच सकते।

युक्लीद की पहली अभिधारणा उपरोक्त उदाहरण से सिद्ध होती है। उसकी अभिधारणा कुछ इस प्रकार है।

अभिगृहीत (Postulates)-1 : दिए हुए दो भिन्न बिन्दुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

युक्लीद की भाषा में "एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक सरल रेखा खींचो"।

2. रेखाखण्ड PQ खींचो।

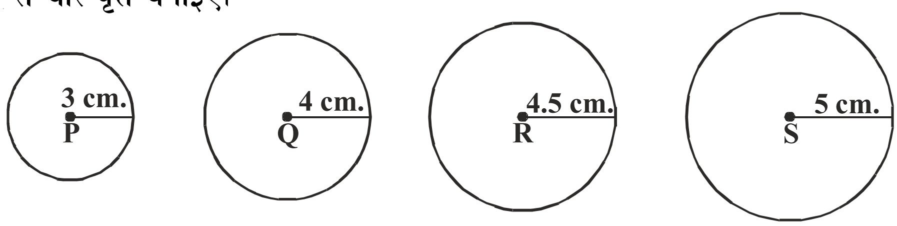
उसे दोनों ओर बढ़ाइए।

PQ को कितना विस्तृत कर सकते हैं? क्या उसका कोई अंतिम बिन्दु होगा? हम देखेंगे कि PQ को दोनों ओर अनंत तक बढ़ा सकते हैं उनका कोई अंतिम बिन्दु नहीं होगा। युक्लीद ने यह अपने दूसरे अभिधारणा में सिद्ध किया है।

अभिगृहीत-2 :

युक्लिद की भाषा में ''किसी रेखा को दोनों ओर क्रमशः बढ़ाया जाय तो'' उसे युक्लीद ने उसे सांत रेखा का नाम दिया है।

3. चार वृत्तों की त्रिज्यायें 3 सें-मी, 4 सें-मी, 4.5 सें-मी तथा 5 सें-मी. दी गई है सहायता से P, Q, R तथा S केन्द्र से चार वृत्त बनाइए।



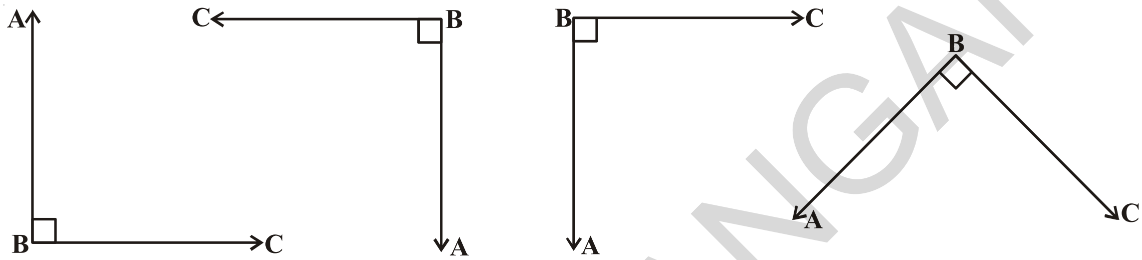
यदि आपको वृत्त का केन्द्र तथा त्रिज्या दी गई हो तो क्या आप वृत्तों को बना सकते हैं? हम किसी भी केन्द्र से किसी त्रिज्या द्वारा हम वृत्त बना सकते हैं। (वृत्त अध्याय-12 देखिए)

युक्लीद का तीसरा अभिगृहीत सिद्ध होता है।

(वृत्त को किसी भी केन्द्र तथा दूरी से परिभाषित करने के लिए)

अभिधारणा-3 : किसी को केन्द्र मानकर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

4. एक ड्राइंग पेपर लेकर उस पर विभिन्न रूपों से समकोणों को उतारिए। उनकी भुजाओं को काटकर एक के ऊपर एक व्यवस्थित कीजिए। आपने क्या देखा?



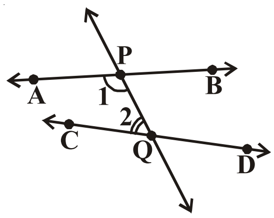
आप देखेंगे कि कोणों की भुजायें एक दूसरे पर होंगे सभी समकोण समान होते है। यह युक्लीद का चौथा स्वयं तथ्य है। क्या यह दूसरे कोणों पर लागू होता है? युक्लीद ने सभी कोणों के लिए समकोण का संदर्भ लिया है जो आगे भी परिस्थिति अनुसार उल्लेखीत किया गया है।

अभिधारणा-4 : सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते है।

आइए अब हम युक्लीद के पाँचवीं अभिधारणा को देखेंगे।

अभिधारणा-5 : (यदि एक सरल रेखा अन्य दो सरल रेखाओं पर तिर्यक डाली गयी हो जिससे एक ही ओर बननेवाले दो अंतः कोण (interior angles) इस प्रकार बनाए गए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।)

नोट: उदाहरणार्थ, दिए गए चित्र में रेखा PQ रेखाएँ AB और CD पर इस प्रकार डाली गयी कि अंतःकोण 1 और 2 का योग जो PQ के बाईं ओर स्थित है, 180° से कम है अतः रेखाएँ AB और CD अंततः PQ के बाई ओर प्रतिच्छेदी होंगी।

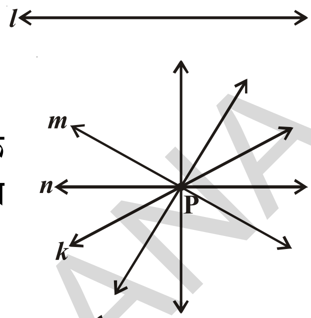


यह अभिगृहीत गणित में अपना महत्वपूर्ण स्थान पा चुका है युक्लीद ने भी माना कि पाँचवीं अभिधारणा एक प्रमेय है। 2000 वर्षों तक गणितज्ञों ने यह सिद्ध करने का प्रयत्न किया कि युक्लीद की पाँचवीं अभिधारणा उनके दूसरी नौं अभिधारणाओं का परिणाम है। उन्होंने यह कोशीश की दूसरी परिकल्पनायें जो उसके समान है उनको लिया जाय। (जॉन प्ले फेयर)।

3.3.2 पाँचवीं धारणा या पाँचवें अभिगृहीत का समतुल्य संस्करण (Equivalent Version of Fifth Postulate)

आगे के गणितज्ञों ने कुछ महत्वपूण विकल्प बताये हैं

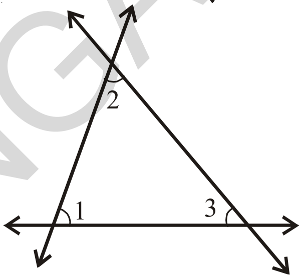
• दिये गये बिन्दु पर दि गयी रेखा पर नहीं बल्कि एक समानान्तर रेखा खींच सकते हैं (जॉन प्ले फेयर – 1748-1819)



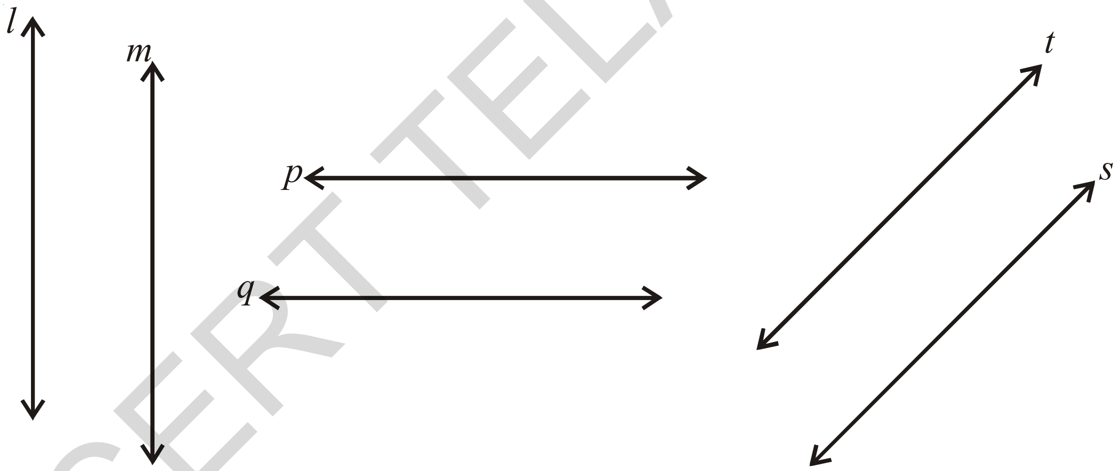
मान लीजिए l एक रेखा है तथा P बिन्दु जो रेखा l पर नहीं है। P से l के समानान्तर एक रेखा खींच सकते हैं। इसे प्ले फेयर (Play Fair) का स्वयं तथ्य कहते हैं।

• किसी भी त्रिभुज के कोणों का योग स्थिर होता है तथा दो समकोणों के समान होता है। (काल्पनिक Legendre)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$ (दो समकोण)



• रेखाओं की जोडी जो सभी जगहों पर समान दूरी पर होते हैं। (तथ्य प्रस्तुती Posidominus)



• यदि एक सरल रेखा दो समानान्तर रेखाओं में से एक को काटती है तो वह दूसरी को भी काटेगी। (उद्घोषणा Proclus)

• यदि रेखायें किसी रेखा की समानान्तर हो तो वह एक दूसरे की भी समानान्तर होती है। (उद्घोषणा Proclus)

यदि इनमें से किसी भी कथन को पहली चार अभिधारणाओं को छोड़कर पाँचवीं के स्थान पर लगायेंगे तो वही ज्यामिति प्राप्त होगी।

इन पाँच अभिधारणाओं को बताने के बाद युक्लीद ने उनका उपयोग कुछ और परिणामों को सिद्ध करने में किया है। साध्य निगमित (deductive) तर्कों तथा कथनों को साध्य या प्रमेय कहते हैं।

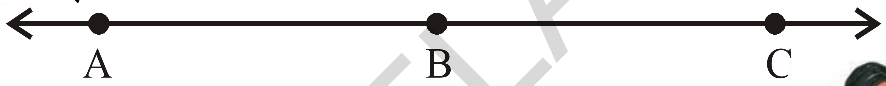
कभी-कभी आप सोचते हैं कि कथन सत्य है पर वह निरिक्षणों के आधार पर की गयी कल्पना होती है। ऐसे कथन जो न तो प्रमाणित होते हैं। न ही अप्रमाणित रहते हैं। उन्हें प्राव्वकल्पना (hypothesis) कहते हैं। गणित की खोजें हमेशा अनुमान से ही शुरू होती है। "हर एक सम संख्या जो 4 से बड़ी है उन्हें दो रूढी संख्याओं के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है" यह एक प्राव्वकल्पना (hypothesis) है जो गोल्ड बॉच (Gold Bach) ने दिया है।

एक परिकल्पना (conjecture) जिसे सत्य प्रमाणित किया जा सकता है उसे प्रमेय कहते हैं। प्रमेय चरणों की तार्कीक श्रृंखला होती है। उपपति में हम तर्क संगत पदों या कडियों द्वारा उस तथ्य को सिद्ध करते हैं।

युक्लीद ने अपने अभिगृहीतों अभिधारणाओं परिभाषाओं और पहले सिद्ध कीये गये प्रमेयों का प्रयोग कर, एक तार्किक श्रृंखला में 465 साध्य निगमित (deduce) किए गए है।

आइए आगे देखें कि युक्लीद ने कुछ परिणामों को सिद्ध करने के लिए अभिधारणाओं का किस प्रकार प्रयोग किया।

उदाहरण-1. यदि A, B और C एक रेका पर स्थित तीन बिन्दु है और B बिन्दु A और C के बीच में स्थित हैं तो सिद्ध कीजिए कि AC - AB = BC.



हल : उपरोक्त चित्र में AB+BC के साथ AC संपाती है।

साथ ही युक्लीद का अभिगृहित 4 कहता है कि वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हो एक दूसरे के बराबर होती है अतः यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$AB + BC = AC$,

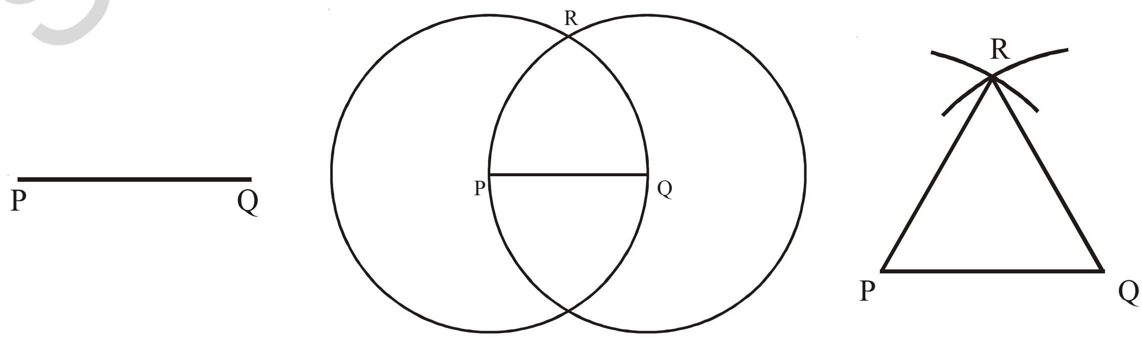
AC के इस मूल्य को दिये गये समीकरण $AC - AB = BC$ में लगाने पर

$\cancel{AB} + BC - \cancel{AB} = BC$

ध्यान दीजिए इस हल में यह मान लिया गया है कि तीन बिन्दुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

उदाहरण -2. सिद्ध कीजिए कि एक दिये हुए रेखाखण्ड पर एक समबाहु त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

हल : एक दी हुई लम्बाई का के रेखाखण्ड मान लीजिए PQ दिया गया है।



युक्लीद की अभिधारणा 3 का प्रयोग करके आप बिन्दु P को केन्द्र और PQ त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींच सकते हैं इसी प्रकार Q को केन्द्र मानकर और QP. त्रिज्या लेकर के अन्य वृत्त खींचा जा सकता है ये दोनों वृत्त मान लीजिए बिन्दु R पर मिलते हैं। अब रेखा खण्ड PR तथा QR खींच कर Δ PQR बनाइए।

अब आपको सिद्ध करना है कि यह त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज है अर्थात् PQ = QR = RP है।

अब PQ = PR है (क्योंकि ये एक वृत्त की त्रिज्यायें केन्द्र P से है)। इसीप्रकार, PQ = QR (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ जो केन्द्र Q से है)

युक्लीद के पहले अभिगृहीत वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर होती है। एक दूसरे के बराबर होती है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि PQ = QR = RP अतः ΔPQR एक समबाहु त्रिभुज है। ध्यान दीजिए कि यहाँ युक्लीद ने, बिना कहीं बताए, यह मान लिया है कि केन्द्र P और Q को लेकर खींचे गए वृत्त परस्पर एक बिन्दु पर मिलेंगे।

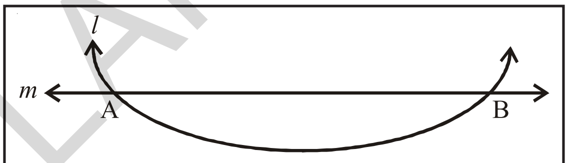
अब हम एक प्रमेय सिद्ध करेंगे।

उदाहरण-3. दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं हो सकते।

दिया गया है : दो रेखायें l तथा m.

सिद्ध करना है : उनमें एक ही उभनिष्ठ बिन्दु होगा।

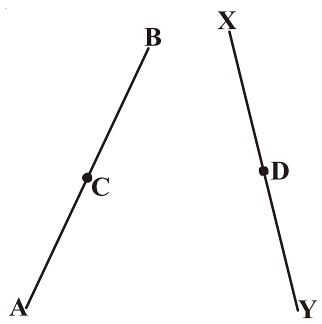
उपपति : मान लीजिए कि दो भिन्न रेखायें दो भिन्न बन्दि A और B पर प्रतिच्छेदित होते हैं।



ध्यान दीजिए कि युक्लीद ने यह स्वयंतथ्य सरल रेखाओं के लिए दिया था न कि वक्र रेखा के लिए। कहीं पर भी रेखा शब्द का उपयोग किया गया है वह सिर्फ सीधी रेखाएँ ही होंगी।

इस प्रकार दो भिन्न बिन्दु से A और B से होकर जाने वाली आपके पास दो रेखाएँ l और m होती है। परन्तु यह कथन अभिगृहीत (उदा-3) के विरुद्ध है जिसके अनुसार दो भिन्न बिन्दुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है। अतः हम जिस परिकल्पना से चले थे कि दो रेखाएँ दो भिन्न बिन्दुओं से होकर जाती है गलत है। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं होगा।

उदाहरण-4. दिये गये चित्र में हम यह देखते हैं कि AC = XD, C तथा D क्रमशः AB तथा XY के मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए AB = XY.



हल : दिया गया AB = 2 AC (AB का मध्य बिन्दु C है)

XY = 2 XD (XY का मध्य बिन्दु D है)

तथा AC = XD (दिया गया)

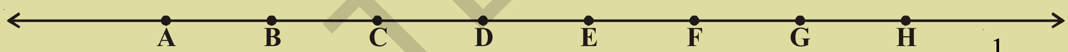
$\therefore$ AB = XY

चूंकि एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।

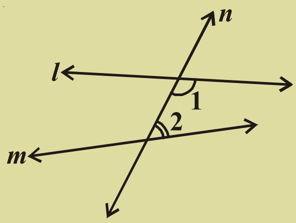
अभ्यास - 3.1

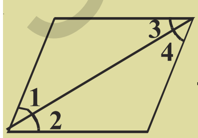
1. निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :-
   i. ठोस पिण्ड के कितने परिमाण होते हैं?
   ii. युक्लीद तत्व की कितनी पुस्तकें हैं?
   iii. घनाभ के कितने पृष्ट होते हैं?
   iv. त्रिभुज के तीन अंतः कोणों का योग कितना होता है?
   v. ज्यामिति के किन्ही तीन अपरिभाषित पदों को लिखिए।
2. दिए गए कथन सत्य है या असत्य लिखिए उसका कारण बताइए।
   a) एक बिन्दु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।
   b) सभी समकोण समान होते हैं।
   c) सम त्रिज्या वाले वृत्त समान होते हैं।
   d) एक साथ रेखा खंण्ड दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढाई जा सकती है।

   e) दिये गये चित्र में AB > AC
3. निचे दिये गये चित्र में AH > AB + BC + CD को सिद्ध कीजिए।



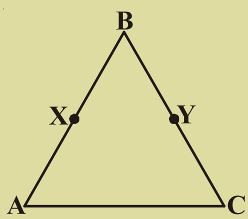
4. यदि बिन्दु Q दो बिन्दु P और R के बीच स्थित है जैसे कि PQ = QR, तो सिद्ध कीजिए PQ = $\frac{1}{2}$ PR.
5. 5.2 सें-मी वाली भुजा वाला समबाहु त्रिभुज उतारिए
6. प्राव्वकल्पना क्या है? उसका एक उदाहरण दीजिए।
7. P तथा Q दो बिन्दु डालकर उनसे गुजरने वाली रेखा खींचिए क्या आप बता सकते हैं उसके समानान्तर कितनी रेखाएँ होंगी? क्या आप उन्हें उतार सकते है?
8. संलग्न चित्र में n रेखा l और m पर तिर्यक डाली गयी है जिसके अंतः कोण 1 और 2 का योगफल 180° होगा, l और m के बारे में आप क्या कहेंगे?





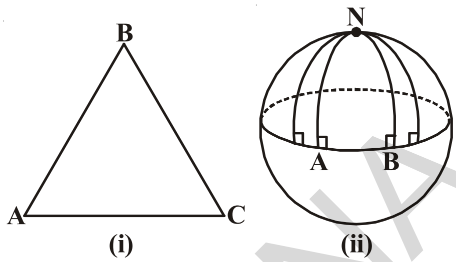
9. दिये गये चित्र में यदि $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ तथा $\angle 3 = \angle 4$, युक्लीद की अभिधारणा का उपयोग करते हुए $\angle 1$ तथा $\angle 2$ के बीच का संबंध बताइए।

10. संलग्न चित्र में BX = $\frac{1}{2}$ AB,



$BY = \frac{1}{2} BC$ तथा $AB = BC$ तो बताइए $BX = BY$ होगा।

युक्लीद रहित ज्यामिति (Non-Euclidian Geometry)



युक्लीद के पाँचवी अभिधारण को गलत सिद्ध करने की अभिक्रिया में कार्ल फ्रेड्रीक गौस (Carl Fedrick Gauss) लोबाचेविस्की (Lobachevsky) तथा बोलयायी (Bolyai) ने कुछ नये विचारों को प्रकट किया। उन्होंने विचार किया कि पाँचवीं अभिधारणा सत्य है या उसके स्थान पर कोई नयी धारणा दे सकते हैं। यदि हम कोई नयी धारणा से उसे प्राप्त करते हैं तो उस ज्यामिती को युक्लीद रहित ज्यामिति कहते हैं।

यदि पृष्ट समतल न हो तो हमारे प्रमेय का क्या होगा?

चलिए हम देखें

एक गेंद लेकर उससे त्रिभुज बनाने की कोशीश करो? आप समतल पर बने त्रिभुज तथा गेंद के त्रिभुज में क्या अंतर देखेंगे? आप देखेंगे कि समतल पृष्ठ पर बनने वाले त्रिभुज की रेखायें सीधी होगी तथा गेंद वाले त्रिभुज की नहीं होगी।

चित्र (ii) में देखिए AN तथा BN (जो गोले के बड़े भाग है) जो एक ही रेखा AB पर लम्ब है। वे N बिन्दु पर मिलती है। फिर भी कोणों का योग दो समकोणों के योग से कम नहीं होगा $(90° + 90° = 180°)$. ध्यान दीजिए ΔNAB के कोणों का योग $180°$ से अधिक होगा क्यों कि $\angle A + \angle B = 180°$.

गोले पर बनने वाले पृष्ट को गोलीय पृष्ट कहते हैं। क्या गोले पर समानान्तर रेखाएँ बन सकती है। उसी प्रकार अलग-अलग पृष्टों से स्वयंतथ्य को जोड़कर नये अभिधारणाओं को बनाओ।

हमने क्या सीखा?

- ज्यामिति के तीन आधार बिन्दु, रेखा, तथा पृष्ट जो कि अपरिभाषित पद है।
- प्राचीन गणितज्ञ युक्लीद ने उन अपरिभाषित पदों को परिभाषित करने का प्रयत्न किया।
- युक्लीद ने एक नयी विचार पद्धती को अपनी पुस्तक "तत्व" में बताया है जो गणित के अगले विकास में सहायक बने।
- युक्लीद की कुछ अभिगृहीत साधारण धारणा।
  - वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हो, एक दूसरे के बराबर होती है।

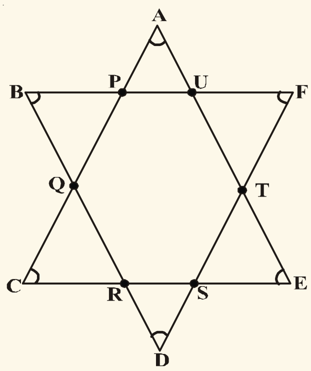
- यदि बराबरों को बराबरों मे जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।
- यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।
- वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों एक दूसरे के बराबर होती है।
- पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।
- एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।
- एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं।

• युक्लीद की अभिधारणाएँ निम्न थी :

- अभिधारणा-1: एक बिन्दु से एक अन्य बिन्दु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।
- अभिधारणा-2: एक अंत होनेवाली (terminated) रेखा को अनिश्चित रूप से बढाया जा सकता है।
- अभिधारणा-3: किसी बिन्दु को केन्द्र मानकर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।
- अभिधारणा-4: सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।
- अभिधारणा-5: यदि एक सरल रेखा अन्य दो सरल रेखाओं पर तिर्यक डाली गयी हो जिसके एक और बनने वाले कोण इस प्रकार बनाये गये कि इन दोनों कोणों का योग दोथे सम कोणों से कम हो तो, वे दोनों रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाये जाने पर उसी और मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम हो ।

दिमागी खेल

1. दिये गये चित्र में $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ का मान क्या होगा? उसके लिए कारण बताइए?



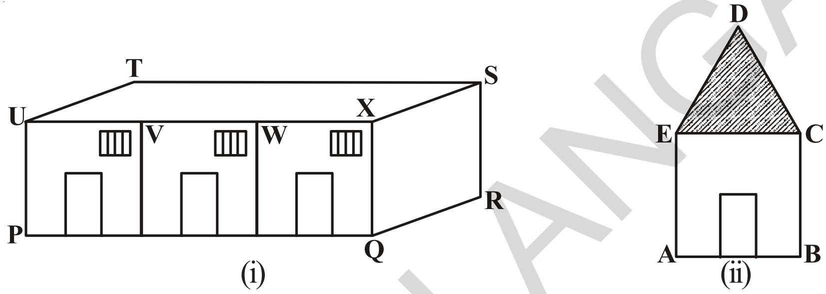
2. यदि किसी वर्ग का कर्ण 'a' इकाई हो तो, उस वर्ग का कर्ण कितना होगा जिसका क्षेत्रफल पहले वाले वर्ग से दुगुना है?

04

रेखाएँ और कोण
(LINES AND ANGLES)

4.1 परिचय

रेश्मा और गोपी ने अपने विद्यालय और घर के चित्र उतारे। क्य आप इन चित्रों में रेखाखण्ड और कोण को पहचनेंगे?



(i) (ii)

ऊपर के चित्र में (PQ, RS, ST, ...) और (AB, BC, CD, ...) रेखाखण्डों के कुछ उदाहरण हैं। जब कि $\angle QPU$, $\angle RQP$, ... और $\angle BAE$, $\angle CBA$, ... कोणों के कुछ उदाहरण हैं।

क्या आप जानते हैं कि वास्तुकार जब इमारतें टावर, पुल आदि के योजना को चित्रित करते हैं तब उनमें अनेक रेखायें और समांतर रेखायें तथा कोण होते हैं।

विज्ञान में जैसे प्रकाशिकी है, उसमें अनेक रेखाओं और कोणों के उपयोग से प्रकाश की गति को और परावर्तन, वर्तन तथा व्यापकत्व समझाया गया। इसी तरह जब हम शरीर के विभिन्न अंगों से किये गये कार्य के विषय में जानकारी के लिये। जैसे बल का प्रयोग करते है हम बल और विस्थापन के बीच के परिणामी बल को रेखाओं और कोणों के द्वारा प्रस्तुत करते हैं। एक स्थान की ऊँचाई ज्ञात करने के लिये कोणों तथा रेखाओं की आवश्यकता होती है। इसलिये हम अपने दैनिक जीवन में कई परिस्थितियों का सामना करते हैं जिसमें ज्यामिति के मूलभूत तथ्यों का उपयोग होता हैं।

इसे हल कीजिए।

अपने चारों-ओर ध्यान से देख कर आपके जीवन के कोई तीन परिस्थितियों को लिखिये जिसमें रेखाओं और कोणों का निरीक्षण होता है।

इनके कुछ चित्र अपनी कापी में उतारिये और कुछ चित्र एकत्रीत कीजिये।

4.2 ज्यामिति के आधारभूत तथ्य (Basic Terms in Geometry)

आप सूर्य से निकलते हुये किरणों के विषय में सोचिये। टार्च लाइट का प्रकाश देखिये। आप उसके प्रकाश को कैसे दर्शाओगे? यह सूर्य से निकली हुई एक किरण है। याद कीजिए कि किरण रेखा का एक भाग है। यह एक बिन्दु पर आरम्भ होकर निश्चित दिशा में निरंतर बढ़ती रहती है। जब कि रेखा को दोनों ओर बढ़ाया जाता है।

दो अंतिम बिन्दुओं के साथ रेखा के भाग को रेखा खण्ड कहते हैं।

हम रेखाखण्ड AB को $\overline{AB}$ से सूचित करते हैं। और उसकी लम्बाई को AB. किरण AB को $\overrightarrow{AB}$ और रेखा AB को $\overleftrightarrow{AB}$ से सूचित करते हैं। हम सामान्यतः रेखाओं के लिए $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ का उपयोग करते हैं। कभी-कभी अंग्रेजी के छोटे अक्षर जैसे l, m, n से भी रेखायें सूचित की जाती हैं।

यदि एक रेखा पर तीन बिन्दु हैं तो वे सरेखीय बिन्दु कहलाते हैं। यदि नहीं है तो असरेखीय बिन्दु कहलाते हैं।

शेखर ने एक रेखा पर कुछ बिन्दु अंकित किया और उनसे बने रेखा खण्डों की गिनती करने का प्रयास किया।

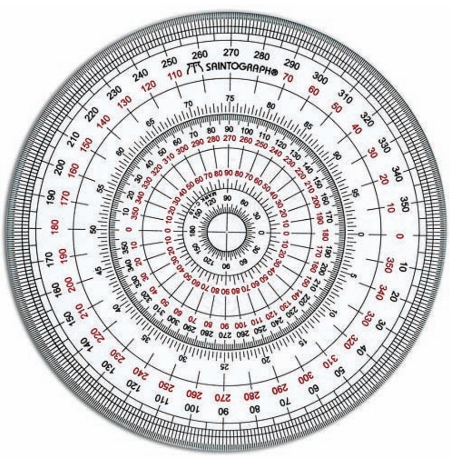
(**नोट** : $\overline{PQ}$ और $\overline{QP}$ एक ही रेखा खण्ड का प्रतिनिधित्व करते हैं।)

क्र.सं.	रेखा पर बिन्दु	रेखा खण्ड	संख्या
1.	P R Q	PQ, PR, RQ	3
2.	P S R Q	PQ, PR, PS, SR, SQ, RQ	6
3.	P S T R Q	....	

क्या बिन्दुओं की संख्या तथा रेखा खण्डों के बीच कोई संबद्ध होता है?

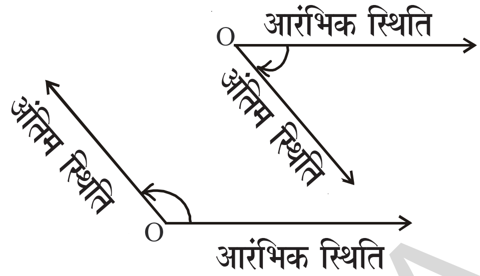
रेखा पर कुछ बिन्दु अंकित करो और संबंध को ज्ञात कीजिए।

रेखा खण्ड पर बिन्दुओं की संख्या	2	3	4	5	6	7
कुल रेखा खंड	1	3	6	.....	.....	.....



एक वृत्त की 360 समान भागों में विभाजित किया गया है (चित्र देखो)

प्रत्येक कोण के भाग का माप एक अंश (degree) है।

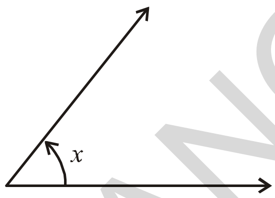


एक किरण को उसके आंरभिक स्थिति से अंतिम स्थिति तक घुमाने पर कोण बनता है।

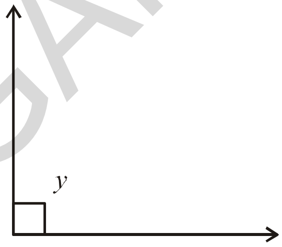
एक किरण का निश्चित बिन्दु पर आरम्भिक स्थिति से अंतिम स्थिति तक के घुमने को 'O' घूर्णन कहते हैं और घूर्णन के इस मापन को कोण कहते हैं।

एक पूर्ण घूर्णन 360^0 देता है। हम कोण को प्रकार (compass) से भी उतार सकते हैं।

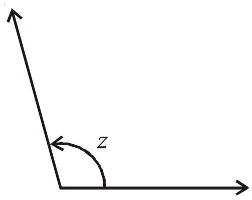
जब दो किरण एक बिन्दु से निकलते हैं तब कोण का निर्माण होता है। कोण बनाने वाली किरणों को कोण की **भुजायें** कहते हैं और उनके उभयनिष्ट बिन्दु को कोण का **शीर्ष** कहते हैं। पिछली कक्षाओं में आपने विभिन्न प्रकार के कोण जैसे न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण, सरल कोण और बृहत्त कोण का अध्ययन किया है।



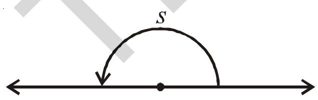
न्यून कोण $0° < x < 90°$



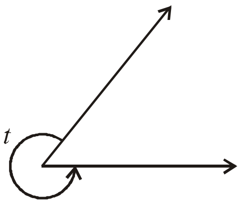
सम कोण $: y = 90°$



अधिक कोण $: 90° < z < 180°$

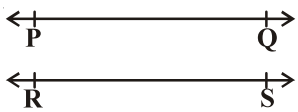


सरल कोण $: s = 180°$



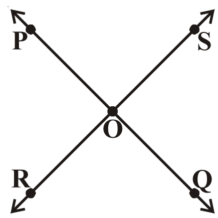
बृहत कोण $: 180° < t < 360°$

4.2.1 प्रतिच्छेदीत रेखायें और अप्रतिच्छेदीत रेखायें (Intersecting Lines and Non-Intersecting Lines) :

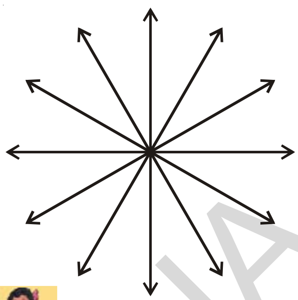


चित्र का निरीक्षण कीजिये। क्या $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ का कोई उभयनिष्ट बिन्दु है? ऐसी रेखाओं को हम क्या कहेंगे। ये सामांतर रेखायें कहलाती हैं।

दूसरी ओर यदि वे एक बिन्दु पर मिलते हैं तो वे प्रतिच्छेदीत रेखायें कहलाती हैं।



4.2.2 संगामी रेखायें (Concurrent Lines)



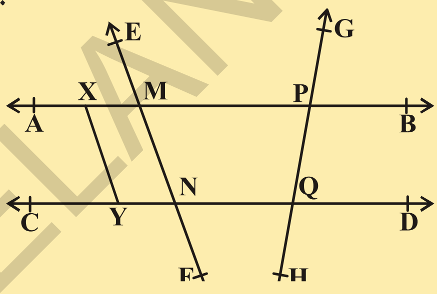
एक बिन्दु से कितनी रेखायें खींच सकते हैं? क्या आपको ऐसी रेखाओं का नाम पता है? जब तीन या अधिक रेखायें एक बिन्दु से गुजरती हैं तो संगामी रेखायें कहलाती हैं और वह बिन्दु जहाँ वे मिलते हैं संगामी बिन्दु कहलाता है।

विचार विमर्श कीजिए और लिखिए

प्रतिच्छेदी रेखायें और संगामी रेखाओं में क्या अंतर है?

अभ्यास - 4.1

1. दिये गये चित्र मे निम्न के नाम बताइये :



(i) कोई छः बिन्दु

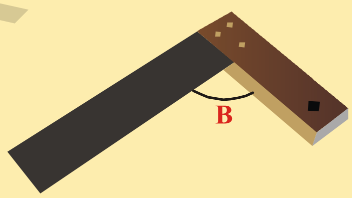
(ii) कोई पाँच रेखा खण्ड

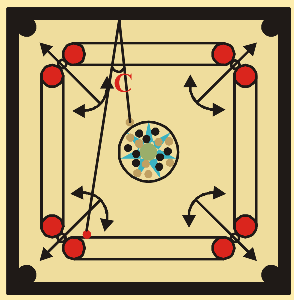
(iii) कोई चार किरण

(iv) कोई चार रेखायें

(v) कोई चार संरेखीय बिन्दु

2. निम्न चित्रों का निरीक्षण कीजिये और उनमें किस प्रकार के कोण है पहचानिये?





3. निम्न कथन सत्य है या असत्य है बताइये :

(i) एक किरण का अंतिम बिन्दु नहीं होता है।

(ii) रेखा $\overleftrightarrow{AB}$, रेखा $\overleftrightarrow{BA}$ के समान है।

(iii) एक किरण $\overrightarrow{AB}$, किरण $\overrightarrow{BA}$ के समन है।

(iv) एक रेखा की लम्बाई परिभाषित होती है।

(v) एक समतल की लम्बाई और चौडाई होती है लेकिन मोटाई नहीं होती है।

(vi) दो निश्चित बिन्दु हमेशा एक प्रत्यक रेखा को सूचित करते हैं।

(vii) दो रेखायें दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(viii) दो प्रतिच्छेदी रेखायें आपस में समांतर नहीं होंगे।

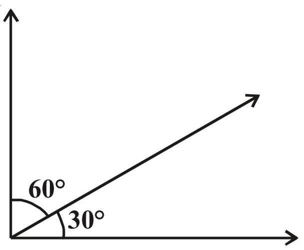
4. एक घडी के दो काँटों के बीच बने कोण क्या है?

(a) 9 बजे (b) 6 बजे (c) 7:00 बजे

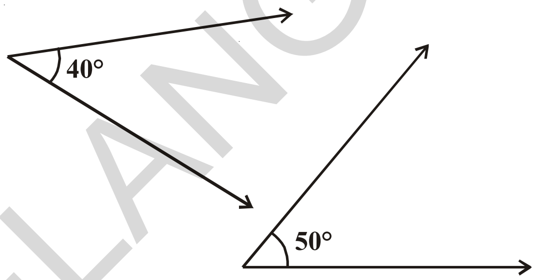
4.3 कोणों की जोडियाँ (Pairs of Angles)

अब हम कुछ कोणों के जोडियों की चर्चा करेंगे।

निम्न चित्रों का निरीक्षण कीजिये और कोणों के योग को ज्ञात कीजिये।



(i)



(ii)

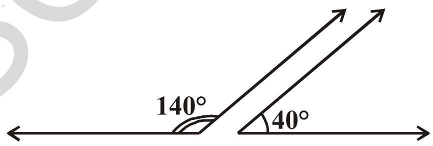
चित्र में बताये गये दो कोणों का योग कितना होता है? क्या वह 90^0 है हम ऐसे कोणों के क्या कहेंगे? वे कोटि कोण (complementary angles) कहलाते हैं।

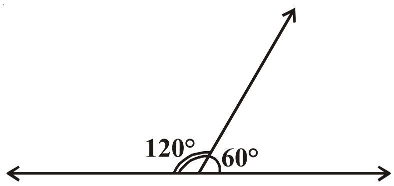
x^0 का कोटि कोण $(90^0 - x^0)$.

उदाहरण-1. यदि एक कोण का माप 62° हो तो उसके कोटि कोण का मान क्या होगा?

हल : क्यों कि योग 90° है, 62° का कोटि कोण होगा $90° - 62° = 28°$

अब निम्न चित्रों का निरीक्षण कीजिये और प्रत्येक चित्र में कोणों का योग ज्ञात कीजिये।





प्रत्येक चित्र में कोणों का योग कितना होता है? वह 180^0 है। क्या आप जानते हो कि ऐसे कोणों को क्या कहा जाता है? हाँ, वे पूरक कोण कहलाते हैं। यदि दिया गया कोण x^0 हो तो उसका पूरक कोण क्या होगा? x^0 का पूरक कोण $(180° - x°)$ होगा।

उदाहरण-2. दो कोटि कोणों का अनुपात 4:5 हो तो कोणों के माप ज्ञात कीजिए?

हल : मानलो आवश्यक कोण $4x$ और $5x$ है

तब $4x + 5x = 90^0$ (कोटि कोण)

$9x = 90^0 \Rightarrow x = 10^0$

इस तरह आवश्यक कोण 40^0 और 50^0 है।

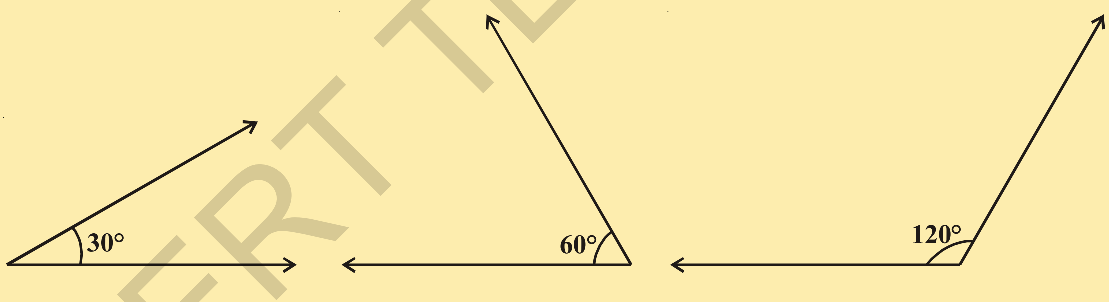
अब इन कोणों की जोडियों का निरीक्षण कीजिये (120°, 240°) (100°, 260°) (180°, 180°) (50°, 310°) ..... आदि। आप इन जोडियों को क्या कहेंगे? दो कोणों का योग यदि 360° हो तो वे कोण संयुग्मी कोण (conjuage angle) कहलाते हैं। 270° का संयुग्मी कौनसा है? $x°$ का संयुग्मी कोण क्या है?

इसे हल कीजिए।

1. निम्न के कोटि कोण, पूरक कोण और संयुग्मी कोण लिखिये।

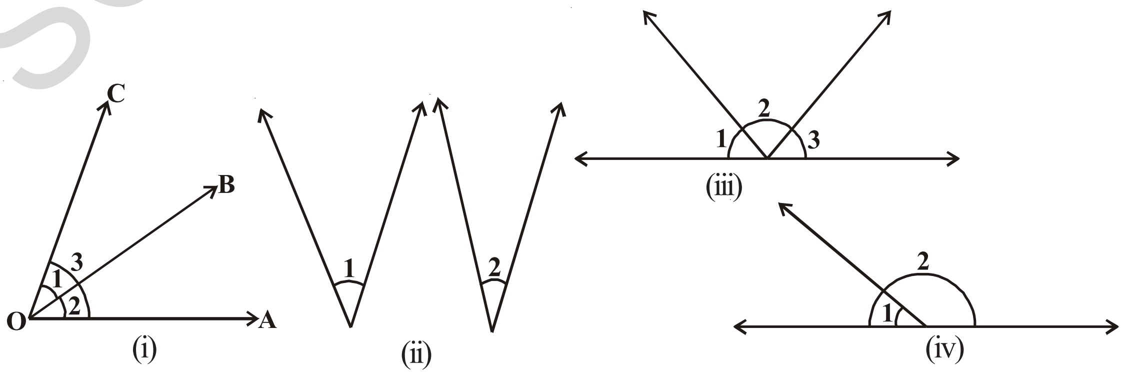
(a)	45^0	(b)	75^0	(c)	54°	(d)	30^0
(e)	60^0	(f)	90°	(g)	0°		

2. निम्न में कौनसी जोडियाँ कोटि कोण है और कौनसी पूरक हैं?



(i) (ii) (iii)

निम्न कोणों का निरीक्षण कीजिये। इनमें क्या समानता है?



(i) चित्र में हम निरीक्षण करते हैं कि शीर्ष 'O' और भुजा '$\overrightarrow{OB}$' $\angle 1$ और $\angle 2$ के लिये समान है। आप उन भुजाओं के विषय में क्या कहोगे जो उभयनिष्ठ नहीं? वे कैसे व्यवस्थित हैं? ये उभयनिष्ठ भुजा के दोनों ओर व्यवस्थित हैं। इस प्रकार के कोणों की जोडी को आप क्या कहेंगे?

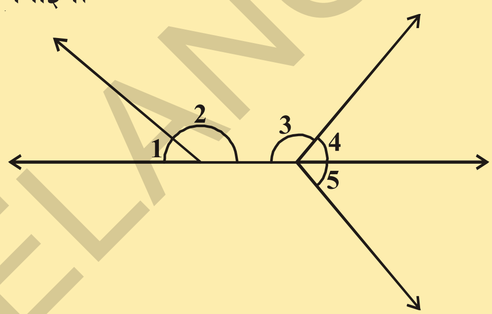
ये आसन्न कोण (adjacent angles) कहलाते हैं।

चित्र (ii) में दो कोण $\angle 1$ और $\angle 2$ दिये गये हैं। इनकी न तो उभयनष्ठि भुजा है न उभयनिष्ठ शीर्ष है। इसलिये ये आसन्न कोण नहीं है।

प्रयत्न कीजिए

(i) चित्र (i, ii, iii & iv) में संगत कोण और असंगत कोण कौन-से हैं ज्ञात कीजिये।

(ii) दिये गये चित्र में संगत कोण की सूचि बनाइये।



उपर से हम ये समझते हैं कि कोणों की वह जोडि जिसका एक उभयनिष्ठ शीर्ष हो, उभयनिष्ठ भुजा हो और दूसरी भुजायें उभयनिष्ठ भुजा के दोनों ओर हो वे आसन्न कोण कहलाते हैं।

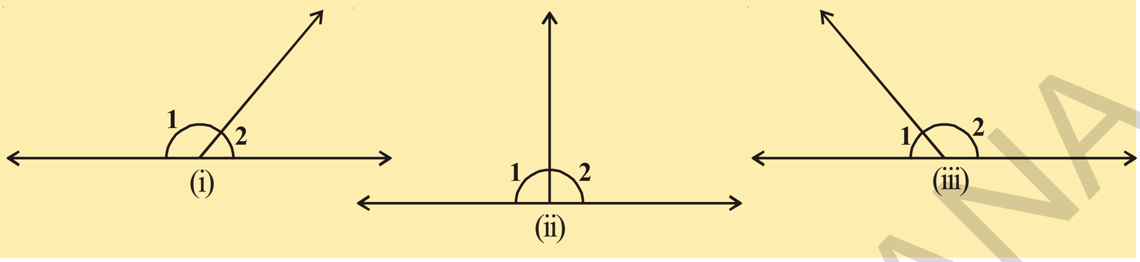
दिये गये चित्र का निरीक्षण करो खिलाडी का हाथ जावेलीन के साथ कोण बना रहा है। ये किस प्रकार के कोण हैं? ये आसन्न कोण है। इन दो कोणों का योग कितना होगा? ये एक सरल रेखा पर स्थित है। इसलिये इन कोणों का योग 180^0 है। हम इन कोणों की जोडी को क्या नाम देंगे? ये रैखिक युग्म कोण कहलाते हैं। इसलिये यदि दो आसन्न कोणों का योग 180^0 हो तो वे रैखिक युग्म कहलाते हैं।

विचार-विमर्श कर लिखिए।

रैखिक युग्मों के कोण हमेशा संपूरक होते हैं। लेकिन संपूरक कोण रैखिक युग्म नहीं होते है। क्यों?

कार्यविधी

नीचे दिये गये कोणों को मापो और तालिका को पूर्ण करो।

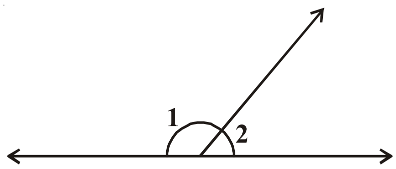


चित्र	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 1 + \angle 2$
(i)			
(ii)			
(iii)			

4.3.1 रैखिक युग्म कोणों का स्वयं तथ्य (Linear Pair of Angles) :

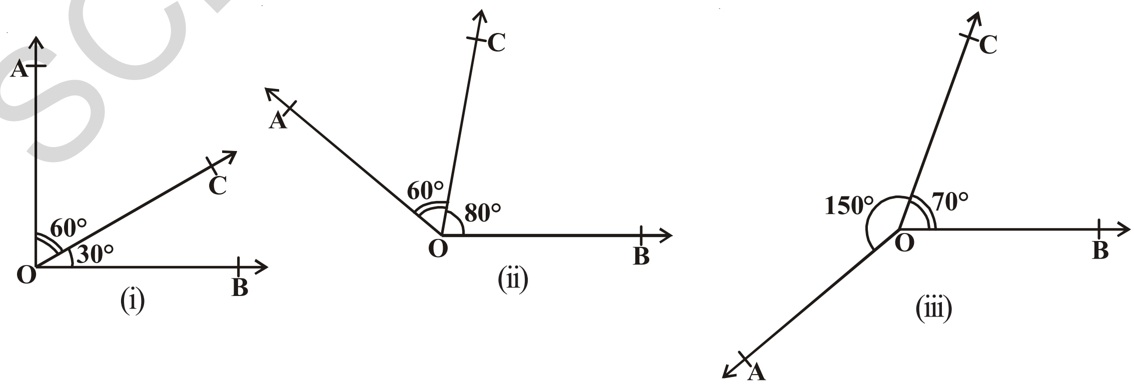
स्वयंतथ्य : यदि एक रेखा कोई किरण डाली गई है तो निर्मित संगत कोणों का योग $180°$ रहता है।

जब दो संगत कोणों का योग $180°$ हो तो वे रैखिक युग्म कहलाते है।

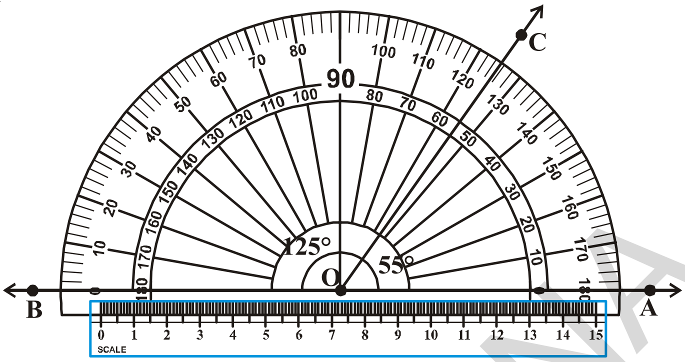


दिये गये चित्र में $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

आओ, हम निम्न किया को करेंगे। चित्र में दर्शाये अनुसार भिन्न मापों के कुछ संगत कोण उतारिये। उनमें से एक भुजा पर पटरी रखिये। जो उभयनिष्ठ नहीं है क्या दूसरी असामान्य भुजा पटरी के साथ है?



चित्र (iv) में आप देखेंगे कि दोनों उभयनिष्ठ भुजायें पटरी पर हैं, जो उभयनिष्ठ नहीं हैं। इसका अर्थ है कि दो उभयनिष्ठ भुजायें जो सरल रेखा बनाते हैं। वे उभयनिष्ठ नहीं होते है।यह भी निरीक्षण कीजिये कि $\angle AOC + \angle COB = 55° + 125° = 180°$. दूसरा चित्र ऐसा नहीं है।

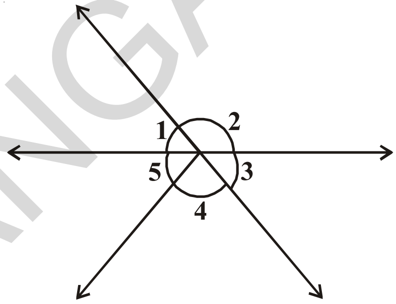


(iv)

स्वयंतथ्य : यदि दो संगत कोणों का योग 180° हो तो, कोणों के उभयनिष्ठ भुजायें जो रेखा का निर्माण करते हैं। यह कोणों के रैखिक युग्म के स्वयंतथ्य का विलोम है।

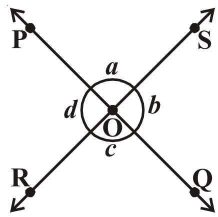
एक बिन्दु पर कोण : हम जानते हैं कि एक बिन्दु पर बने सभी कोणों का योग 360° होगा।

दिये गये चित्र में $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^0$



4.3.2 प्रतिच्छेदीत रेखाओं के कोण (Angles in Intersecting Lines)

कोई दो प्रतिच्छेदीत रेखायें उतार कर नामांकित कीजिये। कोणों के रैखिक युग्म को पहचान कर अपनी नोट बुक में लिखिये। कितने जोडियों का निर्माण हुआ?

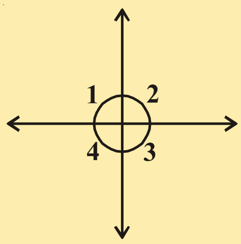


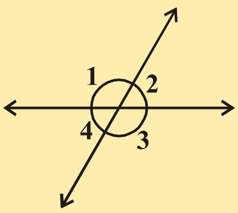
चित्र में, $\angle POS$ और $\angle ROQ$ समान शीर्ष और बिना उभयनिष्ठ भुजा के सम्मुख कोण है। **(vertically opposite angles).**

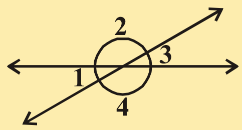
कौन-सी जोडी सम्मुख कोण हैं? क्या आप इन्हें पहचानोगे? (चित्र देखो)

क्रिया कलाप

निचे दिये गए चित्रों में $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ और $\angle 4$ का मापन करो और निम्न तालिका को पूर्ण करो।





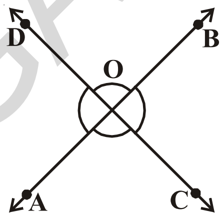


चित्र	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
(i) (ii) (iii)				

(सम्मुख कोणों के विषय में आप क्या निरीक्षण करोगे? क्या ये समान है? अब हम इस विषय को तार्किक विधी से सिद्ध करेंगे।)

प्रमेय-4.1 : यदि दो रेखायें एक दूसरे को प्रतिच्छेदीत करती हैं, तो निर्मित सम्मुख कोण समान होंगे।

दिया गया है (परिकल्पना) : AB और CD दो प्रतिच्छेदी रेखायें हैं O पर।



सिद्ध करना है (निष्कर्ष) (R.T.P.)

(i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle DOA = \angle COB$.

उपपति :

किरण $\overrightarrow{OA}$ रेखा $\overleftrightarrow{CD}$ पर है

इसलिये, $\angle AOC + \angle DOA = 180°$ [रैखिक युग्म कोण का स्वयंतथ्य] .... (1)

और $\angle DOA + \angle BOD = 180°$ [रैखिक युग्म कोण का स्वयंतथ्य] .... (2)

$\angle AOC + \angle DOA = \angle DOA + \angle BOD$ [(1) और (2) से]

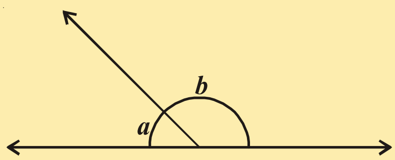
$\angle AOC = \angle BOD$ [दोनो ओर की समान कोणों को हटने पर]

इसी तरह हम यह सिद्ध करेंगे कि

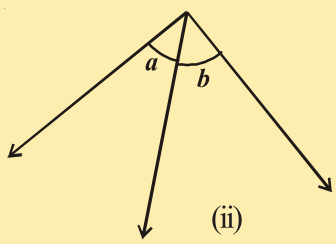
$\angle DOA = \angle COB$

इसे हल कीजिए

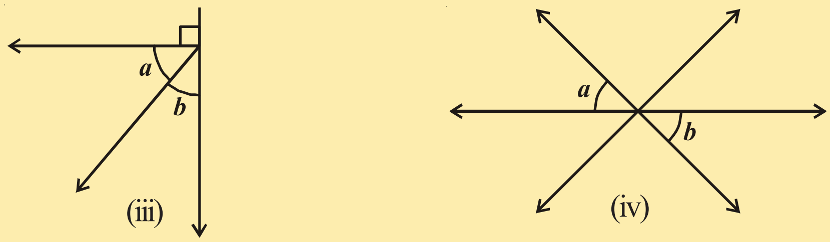
1. दिये गये कोणों को कोटि कोण, रैखिक युग्म, सम्मुख कोण और आसन्न कोणों में वर्गीकृत कीजिए।



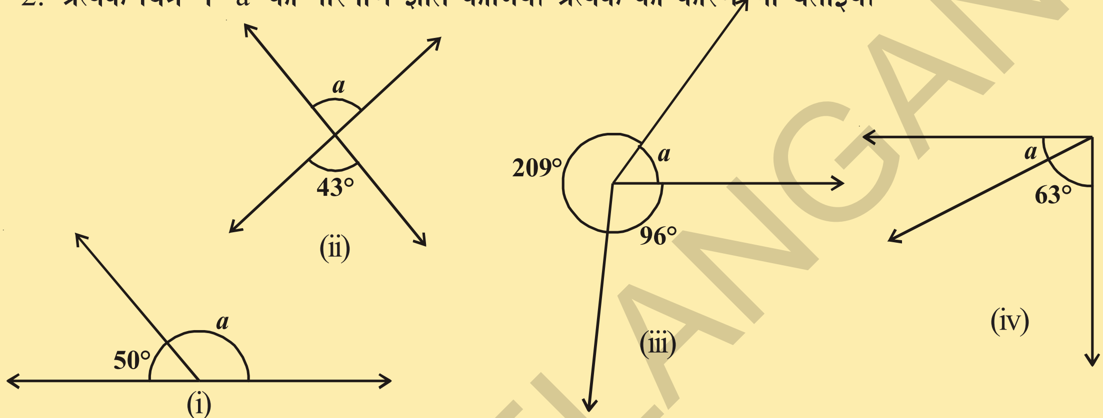
(i)



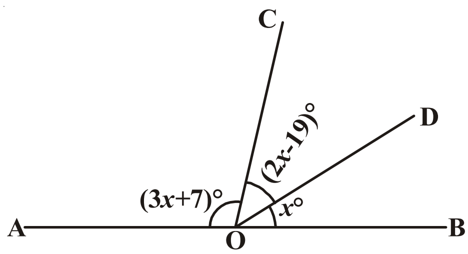
(ii)



2. प्रत्येक चित्र में 'a' का परिमाण ज्ञात कीजिये। प्रत्येक का कारण भी बताइये।



अब हम कुछ उदाहरण हल करेंगे।



उदाहरण - 3. संलग्न चित्र में, $\overline{AB}$ सरल रेखा है। x का मूल्य तथा $\angle AOC$, $\angle COD$ और $\angle BOD$ को ज्ञात कीजिये।

हल : $\overline{AB}$ एक सरल रेखा होने के कारण, एक बिन्दु पर बनने वाले सभी कोणों का योग 180^0 है।

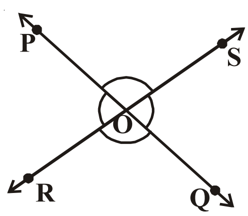
$\therefore (3x + 7)° + (2x - 19)° + x = 180°$ (रैखिक कोण)

$\Rightarrow 6x - 12 = 180 \Rightarrow 6x = 192 \Rightarrow x = 32°$.

इसलिये, $\angle AOC = (3x + 7)° = (3 \times 32 + 7)^o = 103^o$,

$\angle COD = (2x - 19)° = (2 \times 32 - 19)^o = 45^o$, $\angle BOD = 32^o$.

उदाहरण - 4. संलग्न चित्र में PQ और RS एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेदीत करते हैं। यदि $\angle POR : \angle ROQ = 5: 7$, सभी कोण ज्ञात कीजिए।



हल : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (रैखिक युग्म के कोण)

लेकिन $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (दिया गया है)

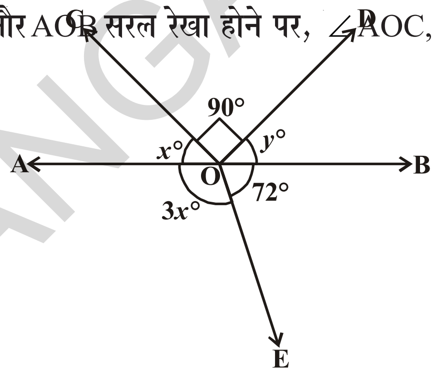
इसलिये, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180 = 75°$

इसी तरह, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180 = 105°$

अब, $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (सम्मुख कोण)

और $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (सम्मुख कोण)

उदाहरण-5. दिये गयें चित्र में $\angle COD = 90^o$, $\angle BOE = 72^o$ और AOB सरल रेखा होने पर, $\angle AOC$, $\angle BOD$ और $\angle AOE$ ज्ञात कीजिये।



हल : AOB एक सरल रेखा है। इसलिये

$\angle AOE + \angle EOB = 180^0$

$= 3x° + 72° = 180°$

$\Rightarrow 3x° = 108° \Rightarrow x = 36°.$

हम यह भी जानते हैं कि

$\therefore \angle COA + \angle DOC + \angle BOD = 180^0$ ($\because$ सरल रेखा)

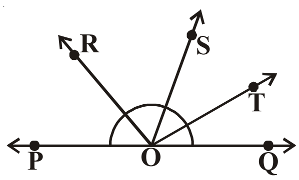
$\Rightarrow x° + 90° + y° = 180°$

$\Rightarrow 36° + 90° + y° = 180°$

$y° = 180° - 126° = 54°$

$\therefore \angle COA = 36^o$, $\angle BOD = 54^o$ और $\angle AOE = 108^o$.

उदाहरण-6. संलग्न चित्र में PQ रेखा पर किरण OS है। किरण OR और किरण OT, है जो क्रमशः $\angle SOP$ और $\angle QOS$ के समद्विभाजक हैं। $\angle ROT$ ज्ञात करो।



हल : रेखा PQ पर किरण OS है।

अतः $\angle SOP + \angle QOS = 180°$ (रैखिक युग्म कोण)

मानलो $\angle SOP = x°$

अतः $x° + \angle QOS = 180°$ (कैसे?)

इसलिये, $\angle QOS = 180° - x°$

किरण OR, $\angle SOP$ को प्रतिच्छेदीत करती है

$\angle SOR = \frac{1}{2} \times \angle SOP$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

इसी तरह, $\angle TOS = \frac{1}{2} \times \angle QOS$

$$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$$

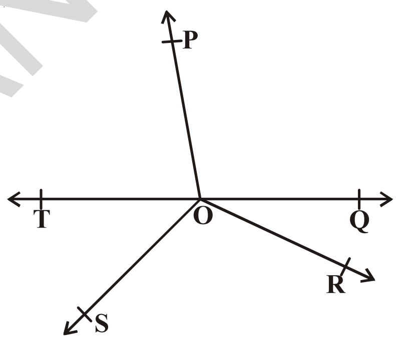
$$= 90° - \frac{x°}{2}$$

अब, $\angle TOR = \angle SOR + \angle TOS$

$$= \frac{x°}{2} + \left(90° - \frac{x°}{2}\right)$$

$$= 90°$$

उदाहरण-7. संलग्न चित्र में, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ और $\overrightarrow{OS}$ चार किरण हैं।



सिद्ध कीजिये कि $\angle QOP + \angle ROQ + \angle SOR + \angle POS = 360°$.

हल : दिये गये चित्र में, आप किरण $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ या $\overrightarrow{OS}$ में से कोई एक किरण की एक विलोम किरण चित्रित करना आवश्यक है।

एक किरण $\overrightarrow{OT}$ उतारिये जिससे $\overleftrightarrow{TOQ}$ एक रेखा है। अब किरण OP रेखा $\overleftrightarrow{TQ}$ पर है।

अतः $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ .... (1) (रैखिक युग्मस्वयंतथ्य

इसी तरह, किरण $\overrightarrow{OS}$, रेखा $\overleftrightarrow{TQ}$ पर है

इसलिये, $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ .... (2) (क्यों?)

लेकिन $\angle SOQ = \angle SOR + \angle ROQ$

इसलिये (2) बनेगा,

$\angle TOS + \angle SOR + \angle ROQ = 180°$ .... (3)

अब (1) और (3), को जोड़ने पर आपको प्राप्त होगा,

$\angle POT + \angle QOP + \angle TOS + \angle SOR + \angle ROQ = 360°$ .... (4)

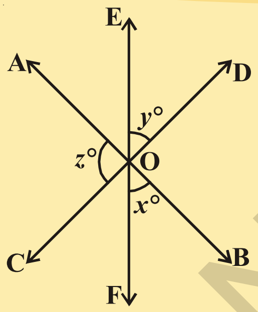
लेकिन $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

अतः, (4) बनेगा

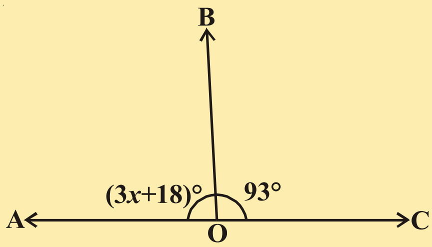
$\angle QOP + \angle ROQ + \angle SOR + \angle POS = 360°$

अभ्यास - 4.2

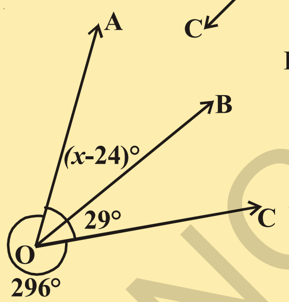
1. दिये गये चित्र में $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ और $\overleftrightarrow{EF}$, O पर प्रतिच्छेदीत करती हैं। $x : y : z = 2 : 3 : 5$ दिये जाने पर x, y और z के मूल्य ज्ञात कीजिये।



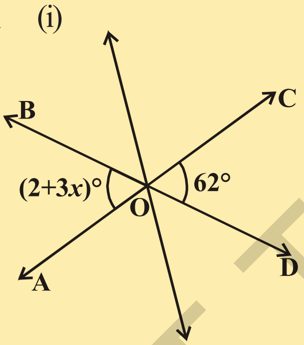
2. निम्न चित्रों में x का मूल्य ज्ञात कीजिये।



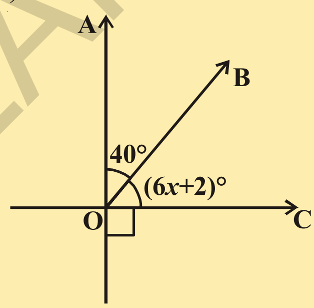
(i)



(ii)

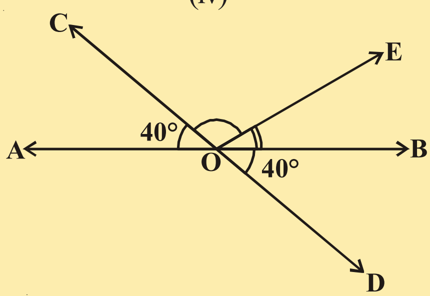


(iii)

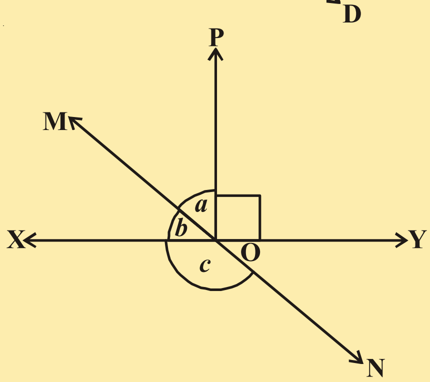


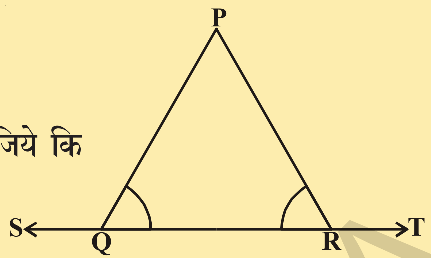
(iv)

3. चित्र में, रेखायें $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ बिन्दु O पर प्रतिच्छेदीत करती है। यदि $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ है और $\angle DOB = 40°$ है, तो $\angle BOE$ और बृहत् कोण $\angle COE$ ज्ञात कीजिए.

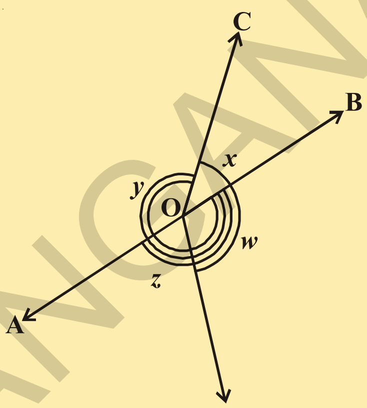


4. चित्र में, रेखाएँ $\overleftrightarrow{XY}$ और $\overleftrightarrow{MN}$ बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती है। यदि $\angle YOP = 90°$ और $a : b = 2 : 3$, तो c ज्ञात कीजिये।

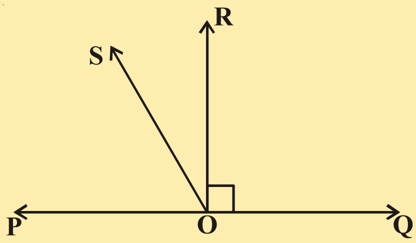




5. दिये गये चित्र में $\angle PQR = \angle PRQ$, है तो सिद्ध कीजिये कि $\angle PQS = \angle PRT$ है।



6. चित्र में, यदि $x + y = w + z$ है, तो सिद्ध कीजिये कि AOB एक रेखा है।

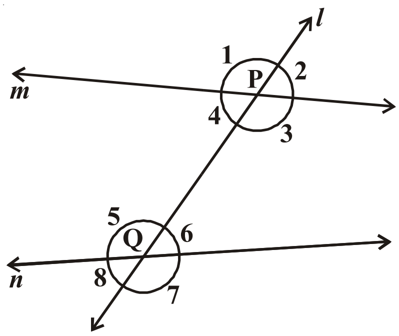


7. संलग्न अकृति में $\overleftrightarrow{PQ}$ एक रेखा है। किरण $\overrightarrow{OR}$ रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ पर लम्ब है। किरणें $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OR}$ के बीच में $\overrightarrow{OS}$ एक अन्य किरण है। सिद्ध कीजिये

$$\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle SOP)$$

8. दिया गया है कि $\angle XYZ = 64°$ और XY को बिन्दु P तक बढाया गया है। एक किरण YQ, $\angle ZYP$ को समद्विभाजित करती है। दी गई सूचना से एक चित्र उतारिये और $\angle XYQ$ और बृहत् कोण $\angle QYP$ ज्ञात कीजिये।

4.4 समांतर रेखायें और तिर्यक रेखायें (Parallel Lines and Transveral)



चित्र का निरीक्षण कीजिये। रेखा *l*, रेखायें m और n को कितने बिन्दुओं पर काटती हैं? रेखा *l* उन रेखाओं को 2 बिन्दुओं पर काटती है। हम इस प्रकार की रेखा को तिर्यक रेखा कहते हैं। रेखा '*l*', 'm' और 'n' को दो भिन्न बिन्दु 'P' और 'Q' पर काटती है। इसलिये रेखा *l*, m और n की तिर्यक रेखा है।

जब एक तिर्यक रेखा, एक जोडी सरल रेखाओं को प्रतिच्छेदीत करती हैं तो बनने वाले कोणों का निरीक्षण कीजिये।

यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को काटती हैं तो आठ कोण बनते हैं।

चित्र में दर्शाये अनुसार हम उनको $\angle 1, \angle 2 \ldots \angle 8$ नाम देंगे। क्या आप इन कोणों का वर्गीकरण करेंगे? कुछ अंतः कोण है और कुछ बाह्य कोण हैं। $\angle 1, \angle 2, \angle 7$ और $\angle 8$ बाह्य कोण कहलाते हैं। जब कि $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ और $\angle 6$ अंतः कोण कहलाते हैं (Interior)।

वे कोण जो आसन्न कोण नहीं हैं और तिर्यक रेखा के एक ही ओर आते हैं जिनमें एक अंतः कोण और दूसरा बाह्य कोण होता है, संगत (corresponding) कोण कहलाते हैं।

दिये गये चित्र में

(a) संगत कोण कौनसे हैं?

(i) $\angle 1$ और $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ और $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ और $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ और $\angle 7$, (इसलिये संगत कोणों की 4 जोडीयाँ होती है।)

(b) एकांतर अंतः कोण कौनसे हैं?

(i) $\angle 4$ और $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ और $\angle 5$, (दो जोडी एकान्तर अंतः कोण है।) (क्यों?)

(c) एकांतर बाह्य कोण कौनसे हैं?

(i) $\angle 1$ और $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ और $\angle 8$, दो जोडी एकान्तर बाह्य कोण है। (क्यों?)

(d) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोण कौनसे हैं?

(i) $\angle 4$ और $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ और $\angle 6$ (दो जोडी अंतः कोण तिर्यक रेखा के एक ही ओर आते हैं।) (क्यों?)

तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों को क्रमगत अंतः कोण **(consecutive interior angles)** या सह-अंत कोण **(co-interior angles)** या संबंधित कोण **(allied interior angles)** कहते हैं।

(e) तिर्यक रेखा के एक ही ओर आने वाले बाह्य कोण क्रमागत बाह्य कोण या सह बाह्य कोण या संबंधित कोण कहलाते हैं (क्यों?)

(i) $\angle 1, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 7$ (दो जोडी अंतः कोण तिर्यक रेखा के एक ही ओर आते हैं।) (क्यों?)

हम उन संगत कोणों को क्या कहेंगे जो रेखायें l और m पर बनते हो तो उनकी जाँच कर ज्ञात कीजिये। क्या वे समान हैं? हाँ वे समान हैं।

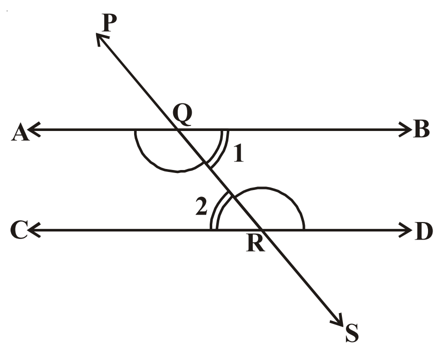
संगत कोणों का स्वयंतथ्य : यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेदीत करती है तब संगत कोणों की प्रत्येक जोडी समान होगी।

एक जोडी एकांतर अंतः कोणों में क्या संबंध है?

(i) $\angle RQB$ और $\angle QRC$

(ii) $\angle AQR$ और $\angle DRQ$ (चित्र में)

क्या हम इन एकांतर अंतः कोणों के बीच संबंध ज्ञात करने के लिये संगत कोणों का स्वयं तथ्य का उपयोग कर सकते हैं?



चित्र में तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PS}$, दो समांतर रेखायें $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को बिन्दु Q तथा बिन्दु R पर प्रतिच्छेद करती है।

आइए हम सिद्ध करेंगे कि $\angle RQB = \angle QRC$ और $\angle AQR = \angle DRQ$

आप जानते हैं कि $\angle PQA = \angle QRC$ ..... (1) (संगत कोणों का स्वयं तथ्य)

और $\angle PQA = \angle RQB$ ..... (2) (क्यों?)

इसलिये (1) और (2) से हम यह निष्कर्ष निकालेंगे कि $\angle RQB = \angle QRC$.

इसी तरह, $\angle AQR = \angle QRD$.

यह परिणाम निम्न प्रमेय के रूप लिखा जाता है।

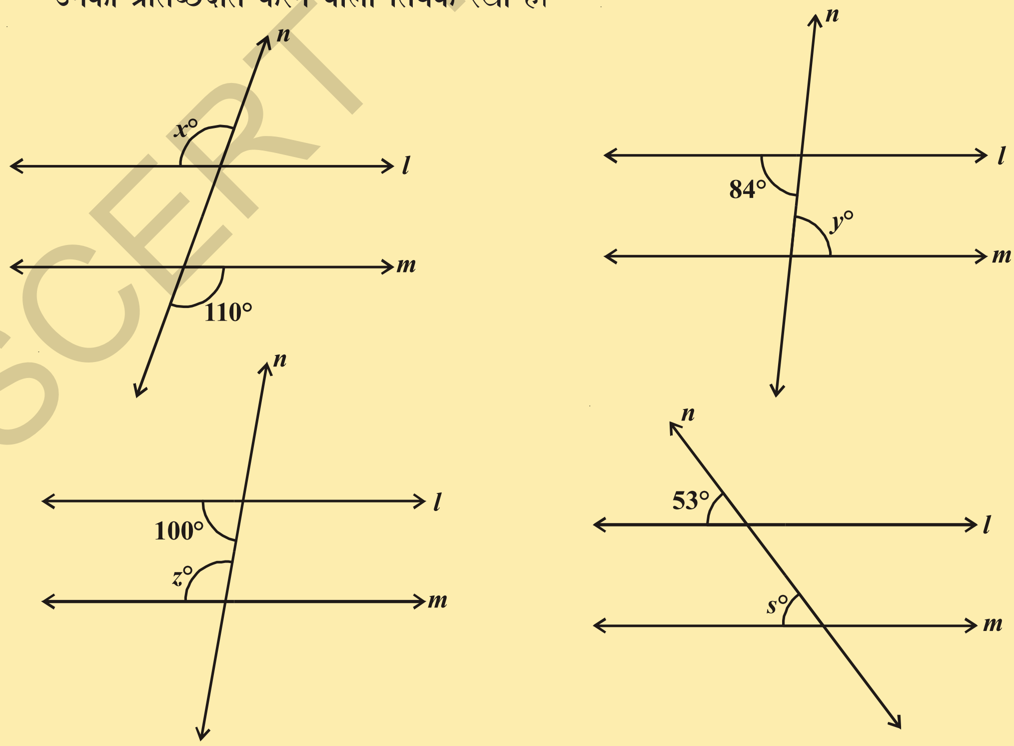
प्रमेय-4.2 : यदि एक तिर्यक रेखा, दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेदीत करती है तो एकांतर अंतः कोणों की प्रत्येक जोडी समान होती है।

इसी तरह तिर्यक रेखा के एक ओर रहने वाले अंतः कोणों का प्रमेय निम्न प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

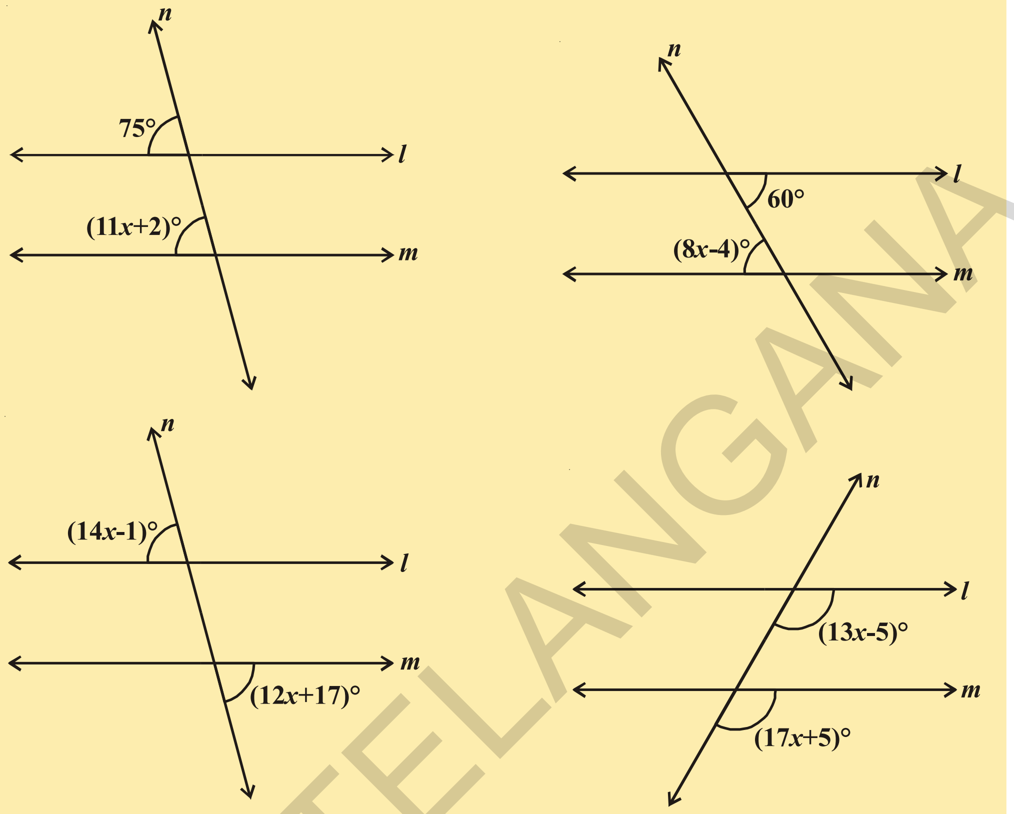
प्रमेय-4.3 : यदि एक तिर्यक रेखा, दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेदीत करती है, तो तिर्यक रेखा के एक ओर आने वाली प्रत्येक अंतः कोणों की जोडी पूरक होती है (supplementary)

इसे हल कीजिये

1. दिये गये चित्र में प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिये जब l और m समांतर रेखायें और n उनको प्रतिच्छेदीत करने वाली तिर्यक रेखा है।

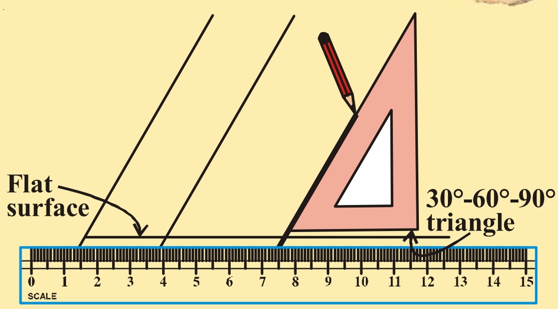


2. ‘x’ का मान ज्ञात कीजिये और कारण भी बताइये



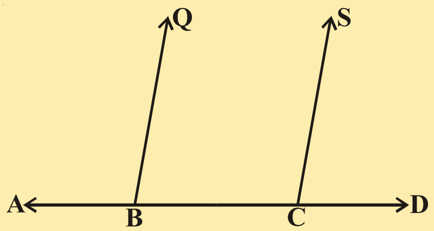
क्रिया-कलाप

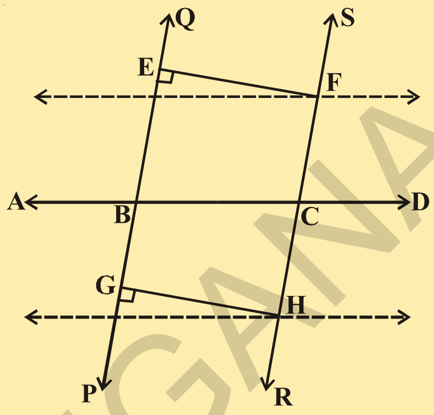
एक पटरी (scale) और गुनिया (set square) लीजिये चित्र में दर्शाये अनुसार पटरी और गुनीये को व्यवस्थित कीजिये पेंसिल में गुनीये के तिरछे किनारे से एक रेखा खींचिये। अब गुनिये को उसके क्षैतिज किनारे के एक ओर रेखा खींचिये। हम निरीक्षण करेंगे कि रेखायें समांतर हैं। ये समांतर क्यों हैं? आप अपने मित्रों से चर्चा किजिये।



इसे हल कीजिये

एक रेखा $\overleftrightarrow{AD}$ खींचो और्‌ उस पर दो बिन्दु B और C अंकित कीजिये। B और C पर $\angle QBA$ और $\angle SCB$ एक दुसरे के समान चित्र में दर्शाये अनुसार रचना करो। AD के दूसरी ओर दो रेखायें PQ और RS बनने के लिये QB और SC को आगे बढ़ाओ।

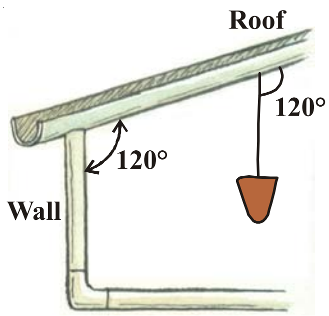




दो रेखायें PQ और RS के लिये दो लम्बवत रेखायें EF और GH खींचिये। आप क्या निरीक्षण करोगे? इससे आप क्या निष्कर्ष निकालोगे? याद कीजिये कि यदि दो रेखाओं के बीच में लम्बवत दूरी समान होतो वे समांतर होंगे।

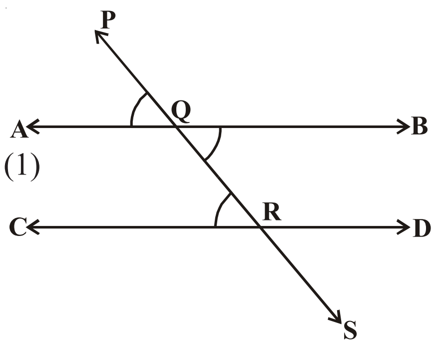
स्वयं तथ्य-1 : ✻ संगत कोणों के स्वयं तथ्य का विलोम:- यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस तरह प्रतिच्छेदीत करें जिससे संगत कोणों की जोडी समान हो तो वे दो रेखायें एक दूसरे के समांतर होती हैं।

एक साहुल गेंद (plumb bob) वह भार है जो एक डोरी के एक सिरे पर बाँधा जाता है, और उस डोरी को साहुल रेखा (plumb line) कहते हैं। वह भार डोरी को नीचे की ओर खींचता है जिससे साहुल रेखा एक-दम सीधी रहती है। मानलो कि दीवार और छत के बीच 120^0 का कोण है और साहुल रेखा ओर छत के बीच 120^o का कोण है, तो राजकर यह निष्कर्ष निकालेगा कि वह दीवार जमीन के ऊर्ध्वाधर है। सोचिये कि राजकर (mason) ने यह निर्णय कैसे लिया?



अब, 'संगत कोणों' के विलोम का स्वयंतथ्य के उपयोग से क्या हम यह बतायेंगे कि दो रेखायें समांतर हैं यदि एक जोडी एकांतर अंतः कोण समान है?

चित्र में तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PS}$, $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को क्रमशः Q और R पर प्रतिच्छेद करती है, जिससे एकांतर अंतः कोण $\angle RQB$ और $\angle QRC$ समान हों।



अर्थात्‌ $\angle RQB = \angle QRC$.

अब हमें यह सिद्ध करना है कि $AB \parallel CD$

$\angle RQB = \angle PQA$ (सम्मुख कोण) ... (1)

लेकिन, $\angle RQB = \angle QRC$ (दिया गया) ... (2)

इसलिये (1) और (2) से,

$\angle PQA = \angle QRC$ प्राप्त होता हैं।

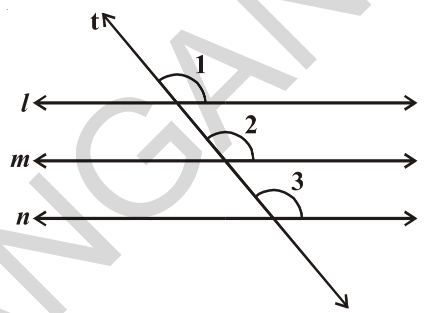
लेकिन $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ की जोडी के लिये तीर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PS}$ के साथ ये संगत कोण है।

इसलिये, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (संगत कोणों के विलोम का स्वयंतथ्य)

इस निष्कर्ष को निम्न प्रमेय के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

प्रमेय-4.4 : यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस तरह प्रतिच्छेदीत करें कि एक जोड़ी एकांतर कोण समान है, तो दो रेखायें समांतर हैं।

4.4.1 एक रेखा के समांतर रेखायें



यदि दो रेखायें एक ही रेखा के समांतर हों, तो क्या वे परस्पर समांतर होंगी?

आइए इसकी जाँच करें। तीन रेखायें l, m और n खींचिये जिसमें $m \parallel l$ और $n \parallel l$ है।

अब हम l, m और n पर एक तिर्यक रेखा 't' खींचेंगे।

अब चित्र में $\angle 1 = \angle 2$ and $\angle 1 = \angle 3$ (संगत कोणों का स्वयंतथ्य)

इसलिये, $\angle 2 = \angle 3$ लेकिन ये दोनों कोण m और n के लिए संगत कोण बनाते हैं।

अतः आप यह कह सकते हैं कि $m \parallel n$.

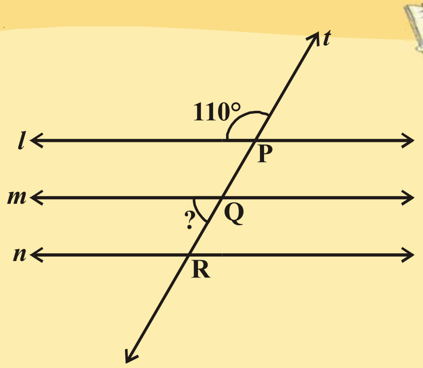
(संगत कोणों के विलोम का स्वयंतथ्य)

प्रमेय-4.5 : वे रेखायें जो एक ही रेखा के समांतर हों, परस्पर समांतर होती है।

प्रयत्न कीजिये

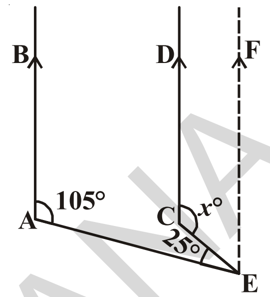
(i) प्रश्न चिह्न लगे हुये कोण का माप ज्ञात कीजिये जो चित्र में दिया गया है।

(ii) कौनसे कोण $\angle P$ के बराबर हैं?



अब, हम कुछ समांतर रेखाओं के उदाहरण हल करेंगे।

उदाहरण-8. दिये गये चित्र में, AB|| CD. x का मूल्य ज्ञात कीजिये।



हल : E से EF || AB || CD खींचो। EF || CD है और CE तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle ECD + \angle FEC = 180^o$ [$\because$ सह-अंतः कोण]

$\Rightarrow x^o + \angle FEC = 180^o \Rightarrow \angle CEF = (180 - x^o)$.

फिर से, EF || AB तथा उन पर AE तिर्यक रेखा है।

$\angle EAB + \angle FEA = 180^o$ [$\because$ सह-अंतः कोण]

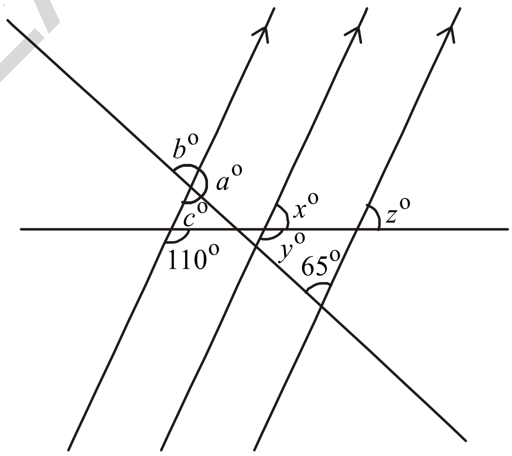
$\Rightarrow 105^o + \angle CEA + \angle FEC = 180^o$

$\Rightarrow 105^o + 25^o + (180^o - x^o) = 180^o$

$\Rightarrow 310 - x^\circ = 180^\circ$

अतः, $x = 130^\circ$.

उदाहरण-9. संलग्न चित्र में, x, y, z और a, b, c के मूल्य ज्ञात कीजिये।



हल : हम जानते हैं कि,

$y^o = 110^o$ ($\because$ संगत कोण)

$\Rightarrow x^o + y^o = 180^o$ (रैखिक युग्म कोण)

$\Rightarrow x^o + 110^o = 180^o$

$\Rightarrow x^o = (180^o - 110^o) = 70^o$.

$z^o = x^o = 70^o$ ($\because$ संगत कोण)

$c^o = 65^o$ (एकान्तर कोण)

$a^o + c^o = 180^o$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow a^o + 65^o = 180^o$

$\Rightarrow a^o = (180^o - 65^o) = 115^o$.

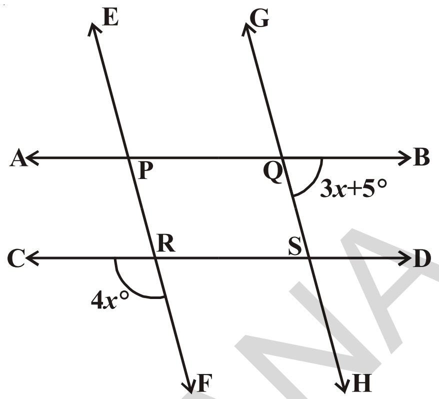
$b^o = c^o = 65^o$. [$\because$ सम्मुख कोण]

अतः, a = 115°, b = 65°, c = 65°, $x = 70^\circ, y = 110^\circ$, z = 70°.

उदाहरण -10. दिये गये चित्र में EF तथा GH समानान्तर रेखायें हैं। यदि रेखायें AB तथा CD भी समानान्तर हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए?

हल : $4x^\circ = \angle APR$ (संगत कोण)

$\angle APR = \angle PQS$ (संगत कोण)



$\angle PQS + \angle SQB = 180°$ (रैखिक युग्म कोण)

$4x° + (3x + 5)° = 180°$

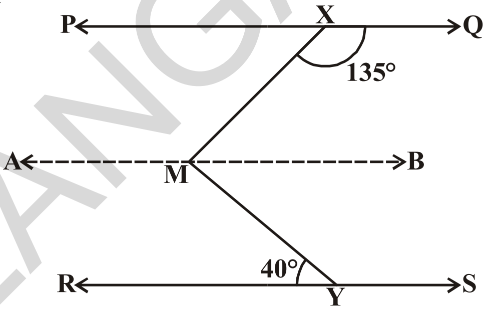
$7x° + 5° = 180°$

$x° = \dfrac{180° - 5°}{7}$

$= 25°$

उदाहरण-11. दिये गये चित्र में यदि PQ || RS, $\angle MXQ = 135^{o}$ और $\angle MYR = 40^{o}$ हैं, तो $\angle XMY$ ज्ञात कीजिये।

हल : यहाँ हमें n से होकर, रेखा PQ के समांतर एक रेखा AB खींचने की आवश्यकता है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।



अब, AB || PQ और PQ || RS.

अतः AB || RS है (प्रमेग 4.5 के अनुसार)

अब, $\angle MXQ + \angle BMX = 180^{o}$

(AB || PQ, तिर्यक रेखा XM के एक ही ओर के अंतः कोण)

परन्तु, $\angle MXQ = 135°$ है। इसलिये,

$135° + \angle BMX = 180°$

अतः $\angle BMX = 45°$ ...(1)

अब, $\angle YMB = \angle MYR$ (AB || RS, एकांतर कोण)

अतः $\angle YMB = 40°$ ...(2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, आपको प्राप्त होगा

$\angle BMX + \angle YMB = 45° + 40°$

अर्थात, $\angle YMX = 85°$

उदाहरण-12. यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेदित करें कि संगत कोणों के एक युग्म के समद्विभाजक परस्पर समाम हों, तो सिद्ध कीजिये कि दोनों रेखाएँ भी परस्पर समांतर होती है।

हल : चित्र में, एक तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{AD}$ दो रेखाओं $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ को क्रमशः बिन्दु B और C पर प्रतिच्छेदित करती है।

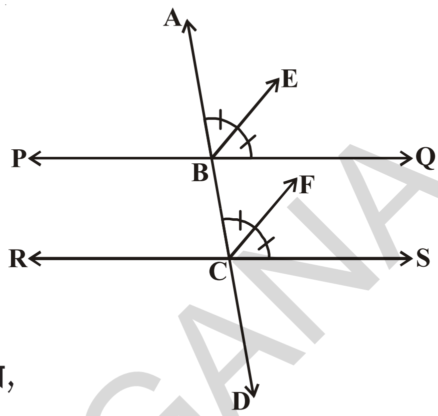
किरण $\overrightarrow{BE}$, $\angle QBA$ की समद्विभाजक और किरण $\overrightarrow{CF}$, $\angle BCS$ की समद्विभाजक है। तथा BE || CF है। हमें सिद्ध करना है कि PQ || RS है। निम्न में से कोई एक जोड़ी को सिद्ध करना पर्याप्त है।

i) संगत कोण समान होते हैं।

ii) अंतः कोणों की या बाह्य कोणों की जोड़ी समान है।

iii) तिर्यक रेखा के एक ओर के अंतः कोण पूरक होते है। (Supplementary).

चित्र से हम यह सिद्ध करेंगे कि “संगत कोणों की जोडियाँ समान है।” यह दिया गया है कि किरण BE $\angle QBA$ की समद्विभाजक है।



अतः $\angle EBA = \frac{1}{2}\angle QBA.$ ... (1)

इसी प्रकार किरण CF, $\angle SCB$ की समद्विभाजक है।

अतः, $\angle FCB = \frac{1}{2}\angle SCB$ ... (2)

परन्तु BE || CF है और $\overleftrightarrow{AD}$ एक तिर्यक रेखा है।

अतः, $\angle ABE = \angle BCF$ (संगत कोण स्वयंतथ्य) ... (3)

(3) में (1) और (2) को प्रतिस्थापित करने पर, आपको प्राप्त होगा,

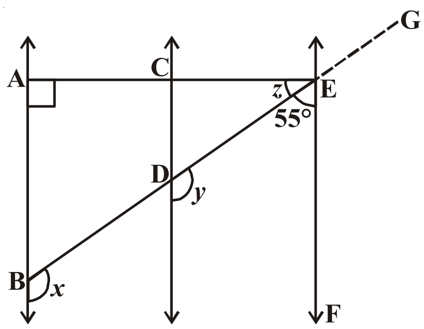
$$\frac{1}{2}\angle QBA = \frac{1}{2}\angle SCB$$

अर्थात्, $\therefore \angle QBA = \angle SCB$

परन्तु ये तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{AD}$ द्वारा रेखाओं $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ के साथ बनाये गये संगत कोण है और ये समान होते है।

अतः, PQ || RS (संगत कोण के विलोम का स्वयंतथ्य)

उदाहरण-13. दिये गये चित्र में, AB || CD और CD || EF है। साथ ही, EA $\perp$ AB है। यदि $\angle BEF = 55°$ है, तो x, y और z के मान ज्ञात कीजिये।



हल : BE को G. तक बढाओ।

अब, $\angle FEG = 180° - 55°$ (रैखिक युग्म कोण)

$= 125°$

और $\angle FEG = x = y = 125°$ (संगत कोण स्वयं तथ्य)

अब, $z = 90° - 55°$ (EA AB)

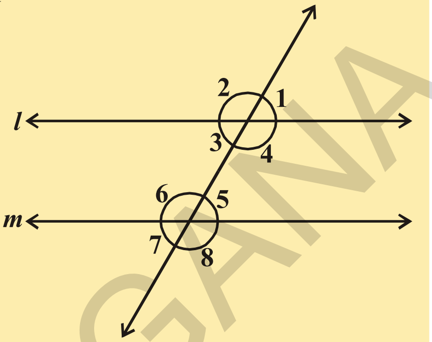
$= 35°$

‘दो रेखाएँ समांतर हैं’ यह सिद्ध करने के विभिन्न पद्धतियाँ

1. संगत कोण समान होते हैं।
2. एकांतर अंतःकोण समान होते हैं।
3. एक जोडि अंतः कोण, तिर्यक रेखा के एक ही ओर पूरक (supplementary) होते हैं।
4. एक समतल में एक ही रेखा पर दो रेखायें लम्बवत हैं।
5. एक समतल में एक ही रेखा से दो रेखायें समानान्तर हैं।

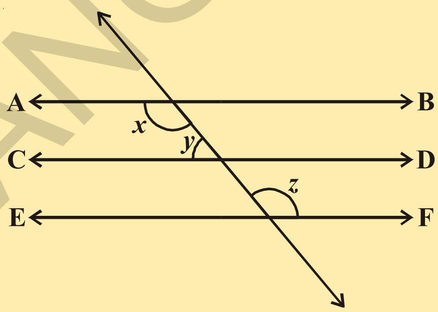
अभास - 4.3

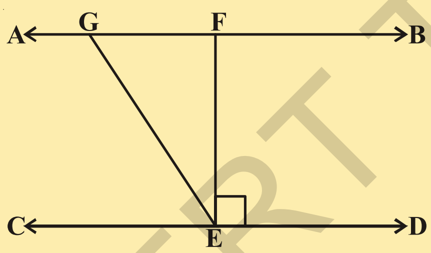
1. दिया गया है कि $l \parallel m$ और सिद्ध करना है कि $\angle 1, \angle 8$ का पूरक है। इस कथन की सत्यता का कारण लिखिये।



कथन	कारण
i. $l \parallel m$	________
ii. $\angle 1 = \angle 5$	________
iii. $\angle 5 + \angle 8 = 180°$	________
iv. $\angle 1 + \angle 8 = 180°$	________
v. $\angle 1, \angle 8$ का पूरक है	________

2. संलग्न चित्र में $AB \parallel CD$; $CD \parallel EF$ और $y : z = 3 : 7$ हो तो x को ज्ञात कीजिये।

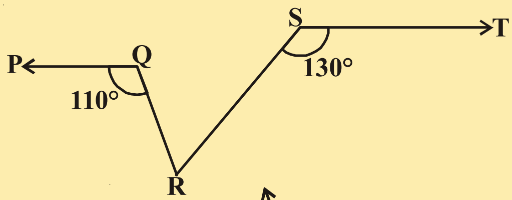




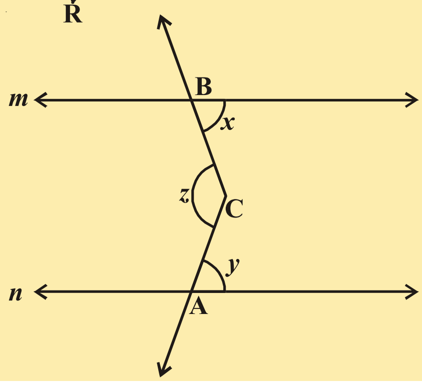
3. संलग्न चित्र में यदि $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ और $\angle DEG = 126°$ है, तो $\angle AGE$, $\angle GEF$ और $\angle EGF$ ज्ञात कीजिये।

4. संलग्न चित्र में यदि $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110°$ और $\angle RST = 130°$ है, तो $\angle SRQ$ ज्ञात कीजिये।

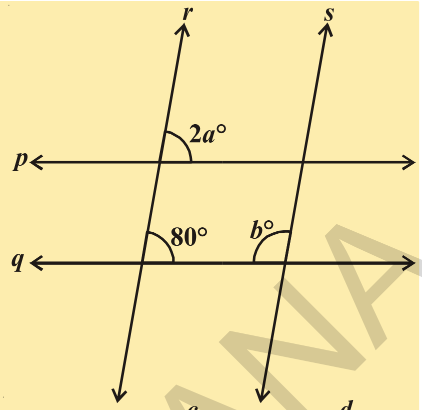
[**संकेत :** बिन्दु R से होकर ST के समांतर एक रेखा खींचिये]



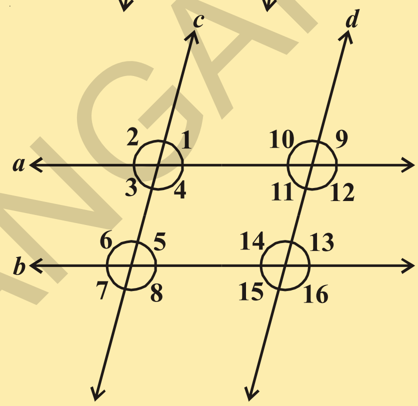
5. दिये गये चित्र में $m \parallel n$ क्रमशः उन पर A और B कोई दो बिन्दु है। उनके बीच में एक बिन्दु 'C' है। $\angle ACB$ ज्ञात करो।

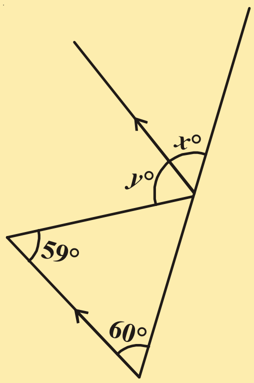


6. दिया गया है कि $p \parallel q$ और $r \parallel s$, तो a और b के मूल्य ज्ञात कीजिये।



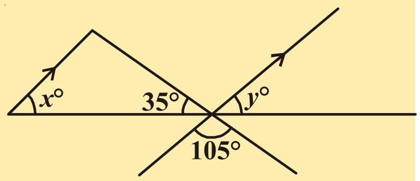
7. यदि चित्र में $a \parallel b$ और $c \parallel d$, हो ता (i) $\angle 1$ (ii) $\angle 2$ के समान कोणों के नाम बताइए।

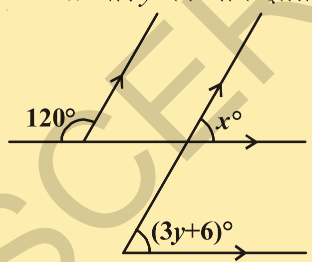




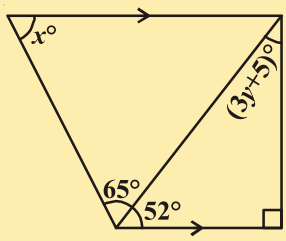
8. संलग्न चित्र में तीर के निशान वाले रेखा खण्ड समानान्तर हो तो हैं। x और y के मूल्य ज्ञात कीजिए।

9. चित्र में तीर के निशान वाले रेखा खण्ड समानान्तर हैं। तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।





10. चित्र से x और y का मान ज्ञात कीजिये।

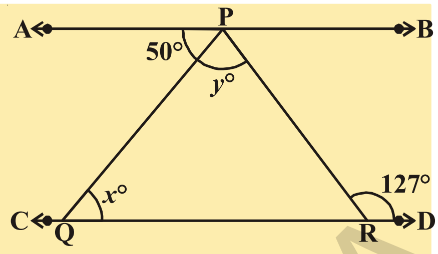


11. चित्र देखकर x और y का मान ज्ञात कीजिए।

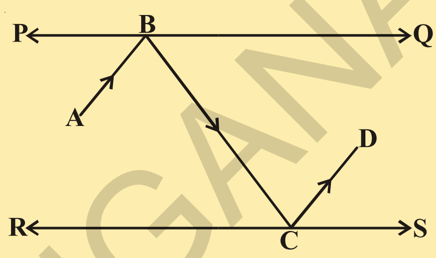
12. निम्न कथन के चित्र उतारिये

"यदि एक कोण की दो भुजायें दूसरे कोण की दो भुजाओं के लम्बवत है तो दो कोण या तो समान होते है या पूरक होते है।''

13. दिये गये चित्र में यदि $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50°$ और $\angle PRD = 127°$ तो x और y ज्ञात कीजिये।

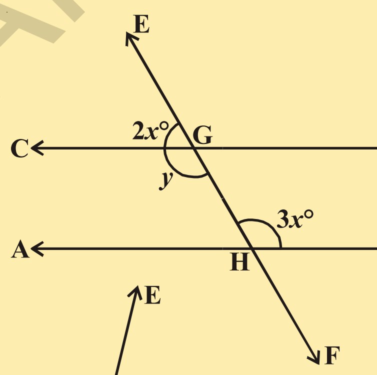


14. संलग्न चित्र में PQ और RS दो दर्पण हे जो एक दूसरे के समानान्तर हैं। आपाती किरण $\overrightarrow{AB}$ दर्पण को PQ पर टकरा कर B पर, परावर्तित किरण $\overrightarrow{BC}$ से गुजरते हुये दर्पण को RS का C पर टकराती है और परावर्तित होकर $\overrightarrow{CD}$ पर आती है। सिद्ध कीजिए कि $AB \parallel CD$.

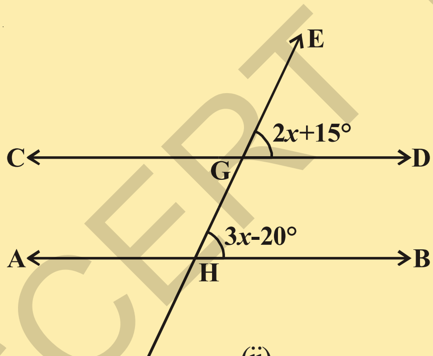


(**संकेत :** समानान्तर रेखाओं के लम्बवत रेखायें भी समांतर होती है।)

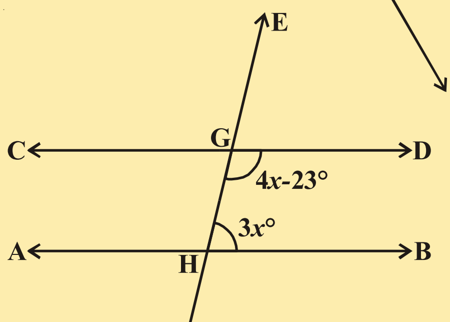
15. दिये गये चित्र में $AB \parallel CD$. EF तिर्यक रेखा है जो AB और CD को G और H पर प्रतिच्छेदित करती है। x और y का मूल्य ज्ञात कीजिये। कारण बताइये।



(i)

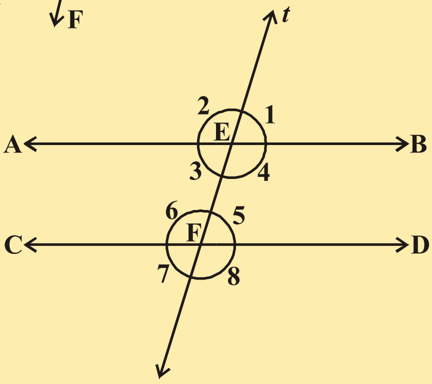


(ii)

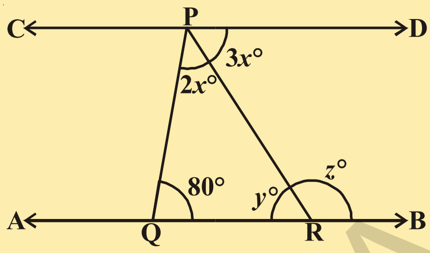


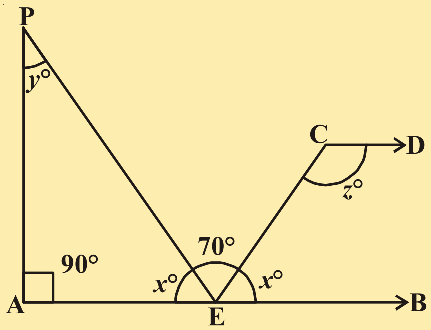
(iii)

16. संलग्न चित्र में $AB \parallel CD$, 't' तिर्यक रेखा है जो E और F पर प्रतिच्छेदित करती है। इस $\angle 2 : \angle 1 = 5:4$, प्रत्येक अंकित कोणों के माप ज्ञात कीजिये।



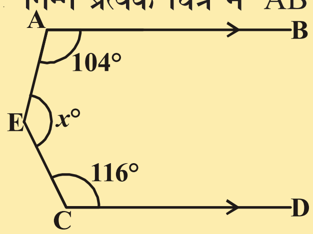
17. संलग्न चित्र में AB || CD.हो तो x, y और z का मूल्य ज्ञात कीजिये।



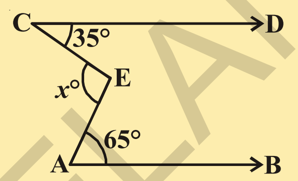


18. संलग्न चित्र में AB || CD.हो तो x, y और z का मूल्य ज्ञात कीजिये।

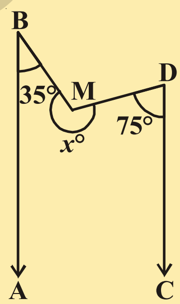
19. निम्न प्रत्येक चित्र में AB || CD है। x का मान क्या होगा?



(i)



(ii)



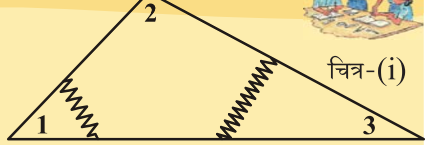
(iii)

4.5 त्रिभुज के कोणों का योग

आइये अब हम सिद्ध करेंगे कि त्रिभुज के कोणों का योग 180° है।

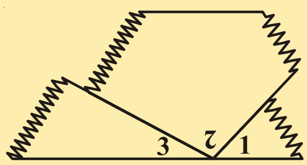
क्रिया कलाप

- चित्र (i) में दिखाये अनुसार एक बड़ा त्रिभुज को पेपर उतार कर काट दीजिये।



चित्र-(i)

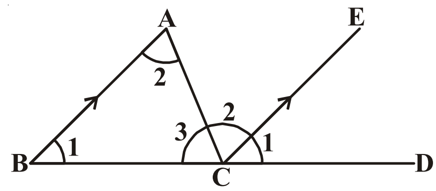
- कोणों के नाम लिखकर उन्हें काट दीजिये।
- तीनों कोणों को एक दूसरे से लगाकर रखिये जिससे एक कोण चित्र (ii) में दर्शाये अनुसार बनेगा है।



चित्र - (ii)

1. तीन आसन्न कोणों से निर्मित बड़े कोण को पहचानिये। उसका मान क्या है?
2. त्रिभुज के कोणों के योग को लिखिये।

अब हम इसे समांतर रेखाओं के स्वयंतथ्य और प्रमेय के उपयोग से सिद्ध करेंगे।



प्रमेय-4.6 : त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° है।

परिकल्पना : ABC एक त्रिभुज है।

निष्कर्ष : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

रचना : BC को D तक बढाइये

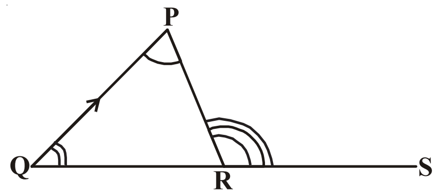
'C' से एक रेखा CE, BA के समानान्तर खींचिये।

उपपत्ती :

$BA \parallel CE$	[रचना से]
$\angle CBA = \angle DCE$ .....(1)	[संगत कोण का स्वयंतथ्य]
$\angle BAC = \angle ECA$ .....(2)	[AB और CE के एकांतर अंतःकोण]
$\angle ACB = \angle ACB$ .....(3)	[समान कोण]
$\angle CBA + \angle BAC + \angle ACB =$	[ऊपर के तीन समीकरण मिलाइए।]
$\angle DCE + \angle ECA + \angle ACB$	
लेकिन $\angle DCE + \angle ECA + \angle ACB = 180^0$	[सरल रेखा के एक हि बिंदू पर बननेवाले कोण]
$\therefore \angle CAB + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$	
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$	

आप जानते हैं कि जब त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाया जाता है तो एक बाह्य कोण बनता है। जब भुजा QR, S तक बढ़ाई जाती है, $\angle SRP$, ΔPQR का बाह्य कोण कहलाता है।

क्या $\angle PRQ + \angle SRP = 180°$? (क्यों?) .....(1)



और यह भी देखिये कि,

$\angle PRQ + \angle RQP + \angle QPR = 180°$ (क्यों?) .....(2)

(1) और (2) से हम देखते हैं कि $\angle PRQ + \angle SRP = \angle PRQ + \angle RQP + \angle QPR$

$\therefore \angle SRP = \angle RQP + \angle QPR$

इसे निम्न प्रमेय के रूप में लिखा जाता है।

प्रमेय-4.7 : यदि एक त्रिभुज की भुजा बढ़ाई गई, तो निर्मित बाह्य कोण दो सम्मुख अंतः कोणों के योग के समान होगा।

उपरोक्त प्रमेय से यह भी सिद्ध होता है कि त्रिभुज का बाठा कोण हमेशा उसके सत्मुख दोनो अंतः कोणों से बड़ा होता है।

अब हम कुछ उदाहरण इसके आधार पर हल करेंगे।

विचार विमर्श कर लिखिए

यदि त्रिभुज की भुजायें बढ़ाई जायें तो निर्मित बाह्य कोणों का योग क्या होगा?

उदाहरण-14. त्रिभुज के तीन कोणों $(2x)°$, $(3x + 5)°$ और $(4x - 14)°$ हो तो x का मूल्य तथा त्रिभुज का प्रत्येक कोण ज्ञात कीजिये।

हल : हम जानते हैं कि त्रिभुज के कोणों का योग $180°$ है।

$\therefore\ 2x° + 3x° + 5° + 4x° - 14° = 180° \Rightarrow 9x° - 9° = 180°$

$\Rightarrow 9x° = 180° + 9° = 189°$

$\Rightarrow x = \dfrac{189°}{9°} = 21.$

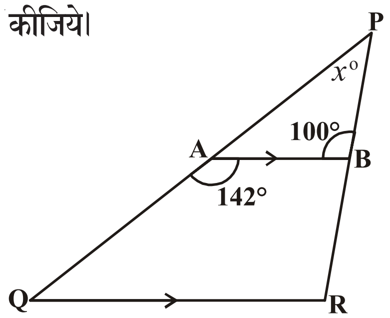
$\therefore\ 2x° = (2\times21)° = 42°,$

$(3x + 5)° = [(3\times21 + 5)]° = 68°.\ (4x - 14)° = [(4\times21) - 14]° = 70°$

अतः त्रिभुज के कोण $42°$, $68°$ और $70°$ होंगे ।

उदाहरण-15. संलग्न चित्र में, $AB \parallel QR$, $\angle BAQ = 142°$ और $\angle ABP = 100°$.

(i) $\angle APB$ (ii) $\angle AQR$ और (iii) $\angle QRP$ ज्ञात कीजिये।



हल : (i) मानलो $\angle APB = x°$,

ΔPAB की भुजा PA, Q तक बढ़ाई गई।

$\therefore$ बाह्य कोण $\angle QAB = \angle PBA + \angle APB$

$\Rightarrow\ 142° = 100° + x°$

$\Rightarrow\ x° = (142° - 100°) = 42°.$

$\therefore\ \angle APB = 42°,$

(ii) अब, $AB \parallel QR$ और PQ तिर्यक रेखा है।

$\therefore\ \angle QAB + \angle RQA = 180°$ [सह अंतः कोणों का योग $180°$]

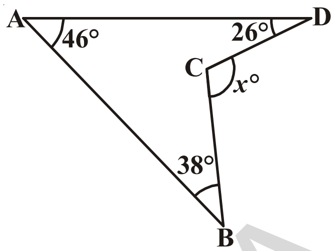
$\Rightarrow\ 142° + \angle RQA = 180°,$

$\therefore\ \angle RQA = (180° - 142°) = 38°.$

(iii) $AB \parallel QR$ और PR तिर्यक रेखा होने के कारण

$\angle PRQ = \angle PBA = 100°$ [संगत कोण]

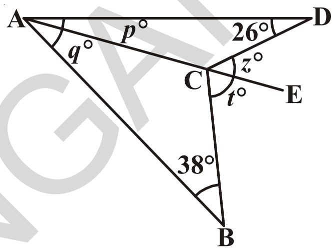
उदाहरण-16. संलग्न चित्र में दिये गये सूचना के उपयोग से x का भाव ज्ञात कीजिए?



हल : दिये गये चित्र में, ABCD चतुर्भुज है। अब हम उसे दो त्रिभुज बनाने का प्रयास करेंगे।

AC को मिलाकर E तक बढ़ाओ।

मानलो $\angle DAE = p^\circ$, $\angle BAE = q^\circ$, $\angle DCE = z^\circ$ और $\angle ECB = t^\circ$. त्रिभुज के बाह्य कोण उसके दो सम्मुख कोणों के योग के बराबर होने के कारण हमें प्राप्त है कि :



$z^\circ = p^\circ + 26^\circ$

$t^\circ = q^\circ + 38^\circ$

$\therefore\ z^\circ + t^\circ = p^\circ + q^\circ + (26 + 38)^\circ = p^\circ + q^\circ + 64^\circ$

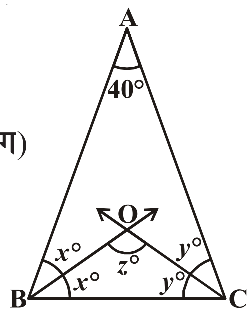
लेकिन, $p^\circ + q^\circ = 46$. $(\because \angle DAB = 46^\circ)$

इसलिये $z^\circ + t^\circ = 46 + 64 = 110^\circ$.

अतः $x^\circ = z^\circ + t^\circ = 110^\circ$.

उदाहरण-17. दिये गये चित्र में, $\angle A = 40^\circ$. यदि $\overrightarrow{BO}$ और $\overrightarrow{CO}$, $\angle B$ और $\angle C$ दो समद्विभाजक हैं तो $\angle BOC$ ज्ञात कीजिये।

हल : हम जानते हैं कि BO, $\angle B$ का समद्विभाजक है और CO, $\angle C$ का समद्विभाजक है।



मानलो $\angle CBO = \angle OBA = x^\circ$ और $\angle OCB = \angle ACO = y^\circ$.

तब, $\angle B = (2x)^\circ$, $\angle C = (2y)^\circ$ और $\angle A = 40^\circ$.

लेकिन, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$2x^\circ + 2y^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

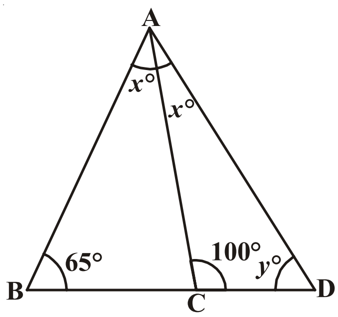
$\Rightarrow 2(x + y)^\circ = 140^\circ$

$= x^\circ + y^\circ = \dfrac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$

अतः $\angle BOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

उदाहरण-18. संलग्न चित्र की सूचना के उपयोग से x और y ज्ञात करो?

हल : ΔABC की BC भुजा D तक बढ़ाई गई है।



बाह्य $\angle DCA = \angle CBA + \angle BAC$

$\therefore\ 100^\circ = 65^\circ + x^\circ$

$\Rightarrow x^\circ = (100^\circ - 65^\circ) = 35^\circ$.

$\therefore\ \angle CAD = \angle BAC = 35^\circ$

त्रिभुज ΔACD में हमें प्राप्त है :

$\angle CAD + \angle DCA + \angle ADC = 180^\circ$ (त्रिभुज के कोणों के योग का गुण)

$\Rightarrow 35^\circ + 100^\circ + y^\circ = 180^\circ$

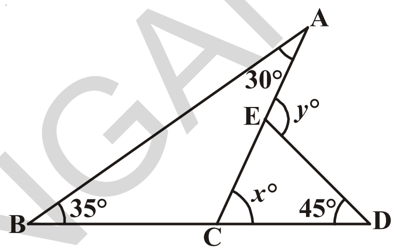
$\Rightarrow 135^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow y^\circ = (180^\circ - 135^\circ) = 45^\circ$

अतः, $x = 35^\circ, y = 45^\circ$.

उदाहरण-19. संलग्न चित्र में दिये गये सूचना से x और y ज्ञात कीजिये।

हल : ΔABC की भुजा BC, D तक बढ़ाई गई



$\therefore$ बाह्य कोण $\angle ACD = \angle BAC + \angle CBA$

$\Rightarrow \quad x^\circ = 30^\circ + 35^\circ = 65^\circ$.

फिर से, ΔDCE की भुजा CE को A तक बढाया गया।

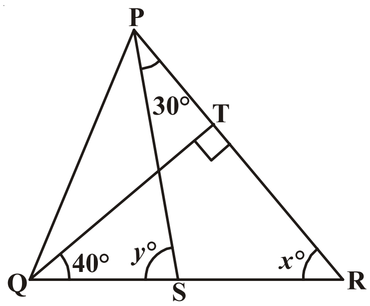
$\therefore$ बाह्य कोण $\angle DEA = \angle EDC + \angle ECD$

$\Rightarrow \quad y = 45 + x^\circ = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$.

अतः, $x = 65^\circ$ and $y = 110^\circ$.

उदाहरण-20. संलग्न चित्र में यदि $QT \perp PR$, $\angle RQT = 40^\circ$ और $\angle SPR = 30^\circ$, x और y ज्ञात कीजिये

हल : त्रिभुज ΔRQT में



$90^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$ (Δ के कोणों के योग का गुण)

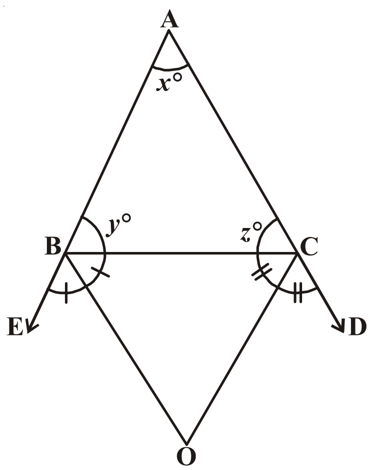
अतः, $\quad x^\circ = 50^\circ$

अब, $\quad y^\circ = \angle SPR + x^\circ$ (त्रिभुज का बाह्य कोण)

अतः, $\quad y^\circ = 30^\circ + 50^\circ$

$= 80^\circ$

उदाहरण-21. ΔABC में भुजायें AB और AC बिन्दु E और D तक क्रमशः बढाई गई है यदि $\angle CBE$ और $\angle BCD$ के समद्विभाजक BO और CO, O पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिये कि $\angle COB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$.



हल : किरण BO $\angle EBC$ की समद्विभाजक है।

अतः, $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle EBC$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - y^\circ)$

$= 90^\circ - \frac{y^\circ}{2} \qquad ...(1)$

इसी तरह, किरण CO, $\angle BCD$ का समद्विभाजक है।

अतः, $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$= \frac{1}{2}(180° - z°)$

$= 90° - \frac{z°}{2}$ ...(2)

ΔBOC में, $\angle COB + \angle BCO + \angle OBC = 180°$ ...(3)

(1) और (2) को (3) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होगा,

$$\angle COB + 90° - \frac{z°}{2} + 90° - \frac{y°}{2} = 180°$$

इसलिये, $\angle COB = \frac{z°}{2} + \frac{y°}{2}$

या, $\angle COB = \frac{1}{2}(y° + z°)$ ... (4)

लेकिन, $x° + y° + z° = 180°$ (त्रिभुज के कोणों का योग)

अतः, $y° + z° = 180° - x°$

अतः, (4) बन जाता है

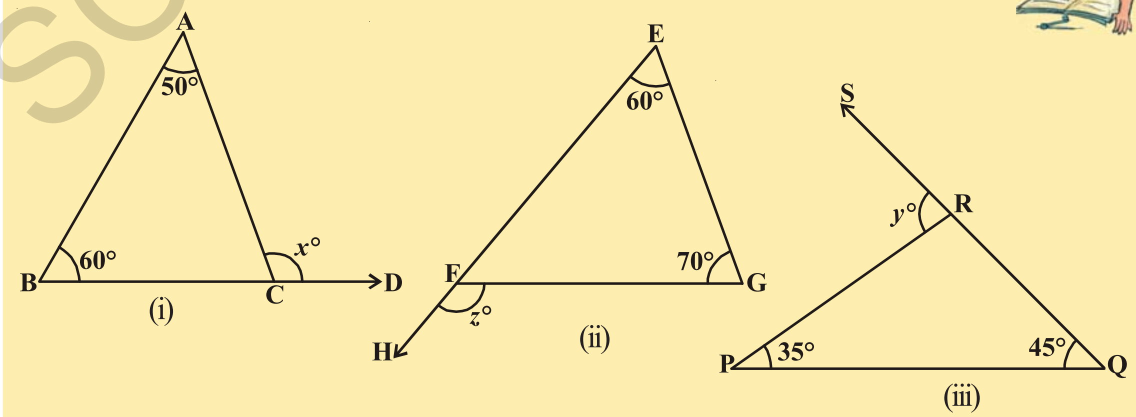
$$\angle COB = \frac{1}{2}(180° - x°)$$

$$= 90° - \frac{x°}{2}$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$$

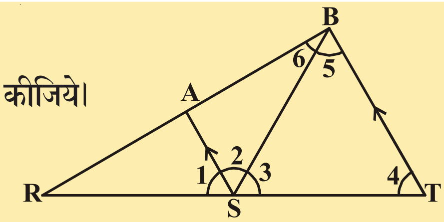
अभ्यास 4.4

1. दिये गये त्रिभुजों में x, y, z ज्ञात कीजिये।

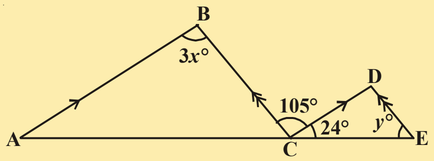


2. दिये गये चित्र में AS || BT; $\angle 4 = \angle 5$

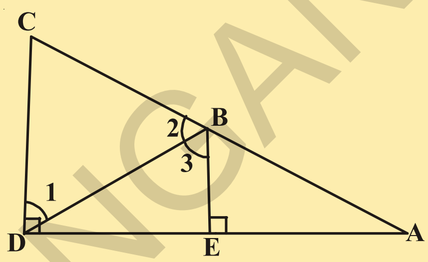
$\overrightarrow{SB}$, $\angle$TSA का समद्विभाजक है। $\angle 1$ का माप ज्ञात कीजिये।



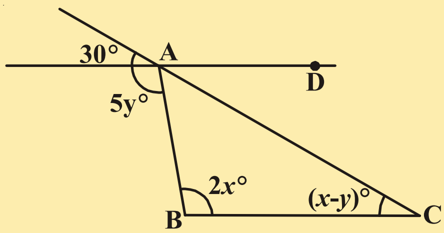
3. संलग्न चित्र AB || CD; BC || DE तब x और y ज्ञात कीजिये।



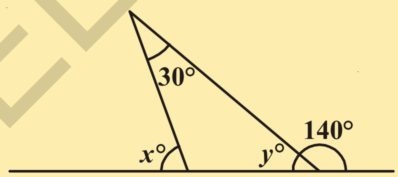
4. संलग्न त्रिभुज में BE $\perp$ DA और CD$\perp$DA तो सिद्ध करो कि $m\angle 1 \cong m\angle 2$.



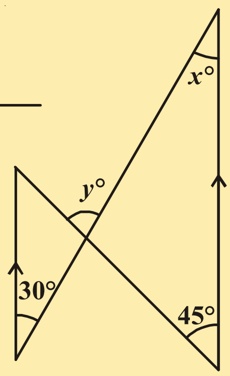
5. x और y के मूल्य ज्ञात कीजिये जब AD, BC के समानान्तर हो जाता है।



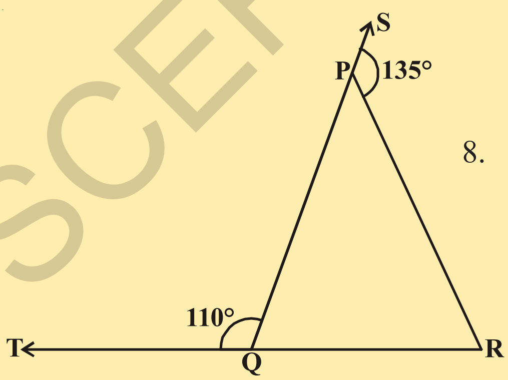
6. आकृति में x और y ज्ञात कीजिये।



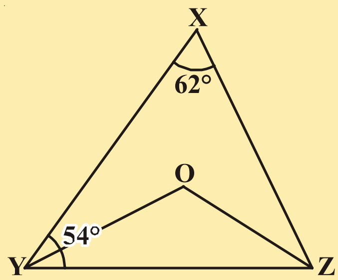
7. चित्र में तीर के दिखाये गये रेखा खण्ड समांतर हो तो x और y का मूल्य ज्ञात कीजिये।



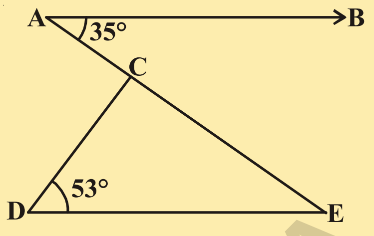
8. दिये गये चित्र में $\angle$PQR की भुजायें QP और RQ को क्रमशः S और T तक बढाया गया है। यदि $\angle RPS = 135°$ और $\angle PQT = 110°$, $\angle$PRQ ज्ञात कीजिये।

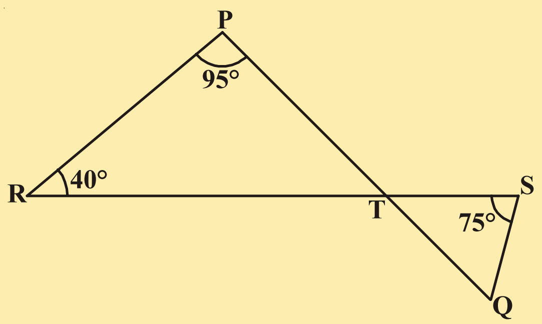


9. संलग्न चित्र में $\angle X = 62°$, $\angle ZYX = 54°$, ΔXYZ में यदि YO और ZO क्रमशः $\angle$XYZ और $\angle$XZY के समद्विभाजक है तो $\angle$OZY और $\angle$YOZ ज्ञात कीजिये।



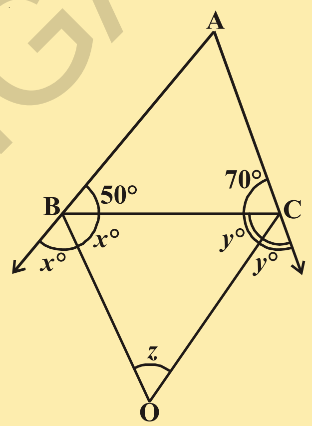
10. दिये गये आकृति में यदि AB || DE, $\angle BAC = 35°$ और $\angle CDE = 53°$, $\angle DCE$ ज्ञात कीजिये।

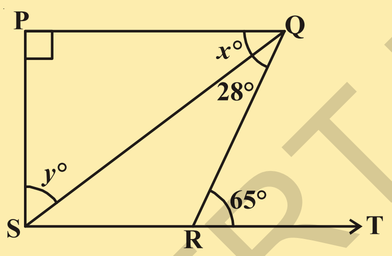




11. दी गई आकृति में यदि रेखाएँ PQ और RS, T पर प्रतिच्छेदित करते हैं जिससे $\angle TRP = 40°$, $\angle RPT = 95°$ और $\angle TSQ = 75°$, $\angle SQT$ ज्ञात कीजिये।

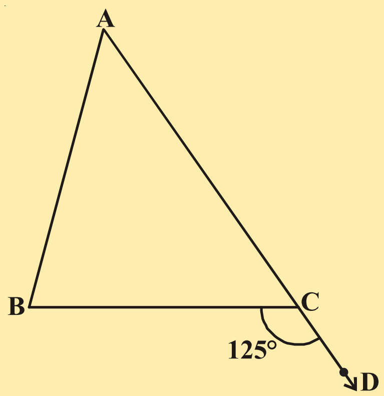
12. संलग्न आकृति में ABC त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 50°$ और $\angle C = 70°$. AB और AC को बढाया गया। यदि 'z' उस कोण का माप है जो कोणों के समद्विभाजक से बना है, तो 'z' ज्ञात कीजिये।

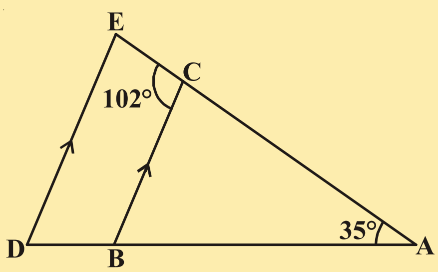




13. दिये गये चित्र में यदि PQ ⊥ PS, PQ || SR, $\angle SQR = 28°$ और $\angle TRQ = 65°$ तो x और y के मूल्य ज्ञात कीजिये।

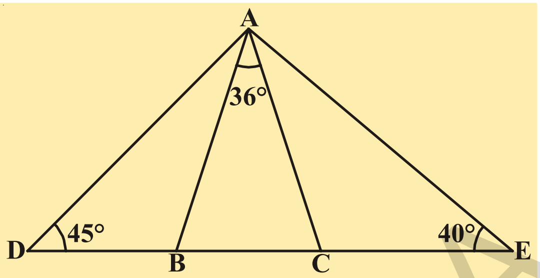
14. ΔABC में भुजा AC को D तक बढाया गया है। $\angle BCD = 125°$ और $\angle A : \angle B = 2 : 3$, हो तो $\angle A$ और $\angle B$ का माप ज्ञात कीजिये।

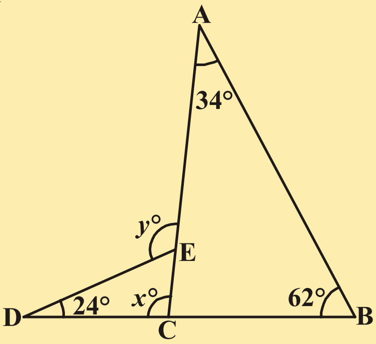




15. संलग्न आकृति में दिया गया है, BC || DE, $\angle BAC = 35°$ और $\angle BCE = 102°$. (i) $\angle BCA$ (ii) $\angle ADE$ और (iii) $\angle CED$ के मान ज्ञात कीजिये।

16. संलग्न चित्र में दिया गया है $AB = AC$, $\angle BAC = 36^o$, $\angle BDA = 45^o$ और $\angle AEC = 40^o$. (i) $\angle ABC$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle DAB$ (iv) $\angle EAC$ ज्ञात कीजिये।





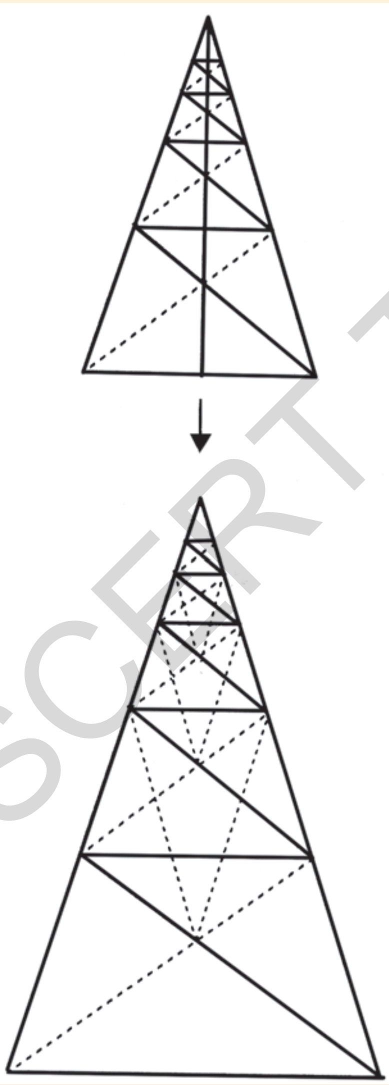
17. चित्र में दि गयी सूचना से x और y की गणना कीजिये।

हमने क्या सीखा?

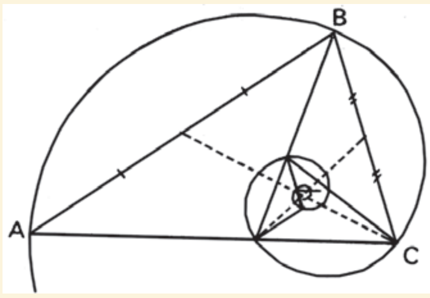
- **रैखिक युग्म स्वयंतथ्य :** यदि एक रेखा पर एक किरण है, तो निर्मित दो आसन्न कोणों का योग 180° है।
- **रैखिक युग्म के स्वयंतथ्य का विलोम :** यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है तो कोणों के विपरीत भुजायें एक रेखा का निर्माण करते हैं।
- **प्रमेय :** यदि दो रेखायें एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते हैं, तो सम्मुख कोण समान होते हैं।
- **संगत कोणों का प्रमेय :** दो समांतर रेखाओं को जब तिर्यक रेखा प्रतिच्छेदित करती है तो प्रत्येक जोडी संगत कोण समान होते है।
- **प्रमेय :** यदि दो समानान्तर रेखाओं को तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करती है तो एकांतर अंतःकोणों का युग्म समान होता है।
- **प्रमेय :** यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती है तो तिर्यक रेखा के एक ही ओर आने वाले अंतःकोणों का प्रत्येक युग्म पूरक होता हैं।
- **संगत कोणों के स्वयंतथ्य का विलोम :** यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं की प्रतिच्छेदित करती है जिससे एक जोडी संगत कोण समान हो, तो वे दो रेखायें परस्पर समानान्तर हैं।
- **प्रमेय :** यदि तिर्यक रेखा, दो रेखाओं को इस तरह प्रतिच्छेदित करती हैं कि एक जोडी एकांतर अंतः कोण समान हैं, तो दो रेखायें समानान्तर होते हैं।

- **प्रमेय :** यदि तिर्यक रेखा, दो रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती हैं और उसके एक ओर के संगत अंतः कोणों का युग्म पूरक हो तो रेखायें समानान्तर होती हैं।
- **प्रमेय :** दी गये रेखा के समानान्तर रेखायें परस्पर समानान्तर होती है।
- **प्रमेय :** त्रिभुज के कोणों का योग 180^o है।
- **प्रमेय :** यदि एक त्रिभुज की एक भुजा बढाई गई तो निर्मित बाह्य कोण, अंतः सम्मुख कोणों के योग के समान होता हैं।

क्या आप जानते हैं?
स्वयं-उत्पादित सुनहरा त्रिभुज



सुनहरा त्रिभुज एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिससे आधार का कोण 72^o और शीर्ष का कोण 36^o. जब दोनों आधार के कोण समद्विभाजित होते हैं तो नव-निर्मित दोनों त्रिभुज भी सुनहरे त्रिभुज हैं। यह प्रक्रिया, निरंतर चलते रहती है वास्तविक त्रिभुज तक, और अनेक सुनहरे त्रिभुज दिखाई देंगे जैसे वे अंदर से खुल रहे हैं।



जैसे कि चित्र में दिखाया गया है सुनहरा त्रिभुज समान कोणों की कमानी (spiral) का भी निर्माण करता है और वह सुनहरा अनुपात $\phi = |AB| / |BC| = 1.618 \ldots$

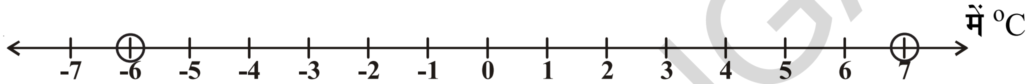
इन चढते हुए अनेक सुनहरे त्रिभुजों से हम उनके अंदर अनेक सुनहरे त्रिभुजों की रचना कर सकते हैं। पंच भुज के पाँच बिन्दुओं को नोट कीजिये। ये भी सुनहरे त्रिभुज है।

05

निर्देशांक ज्यामिति
(CO-ORDINATE GEOMETRY)

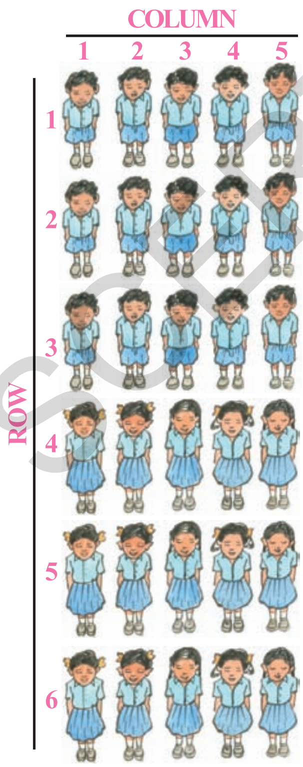
5.1 भूमिका

हिमाचल प्रदेश के कुर्फी का दिसंबर महिने के एक विशेष दिन का अधिकतम तथा न्यूनतम तापमान - $6^{o}C$ तथा $7^{o}C$ है। क्या आप इसे संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं?



यहाँ पर संख्या रेखा तापमान की स्थिति दर्शाने के संदर्भ में उपयोगी पड़ती है।

चलिए हम संलग्न चित्र में दिए गए परिस्थिति का निरिक्षण करेंगे। A,B,C,D,E,F, G तथा H आठ व्यक्ति एक कतार में खडें हैं। टिकट घर से कतार में A प्रथम तथा H अंतिम स्थान पर खडे हैं कॉफी शॉप (cafe) से देखेंगे तो 'H' प्रथम तथा 'A' अंतिम स्थान पर खडे दिखाई देंगे। आपने देखा की संदर्भानुसार वस्तुओं के स्थितिगत मूल्यों में परिवर्तन होता है।



अब हम दूसरे उदाहरण को देखेंगे। क्रिडाकाल (games period) में नौवीं कक्षा के छात्र (चित्र में दर्शाये अनुसार) जमा होते हैं। चित्र के अनुसार क्या आप बता सकते हैं कि सुधा कहाँ खडी है?

रमा ने कहा कि "सुधा दूसरे स्तंभ में खडी है"।

पावनी ने कहा कि "सुधा चौथी पंक्ति में खडी है"।

नसीमा ने कहा कि "सुधा दूसरे स्तंभ तथा चौथी पंक्ति में खडी है।"

उपकोक्त में किसने सही उत्तर दिया? नसीमा के बताये अनुसार क्या आप सुधा को पहचान सकते हैं? क्या आप माधवी को पहचान सकते हैं (जो कि पहला स्तंभ पाँचवीं पंक्ति में खडी है।)

इन विद्यार्थियों को पहचानिए जो

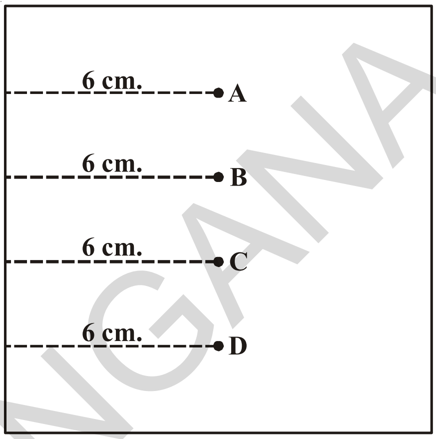
(i) (तीसरा स्तंभ, छठी पंक्ति सीता से)

(ii) (पाँचवां स्तंभ, दूसरी पंक्ति राजू से)

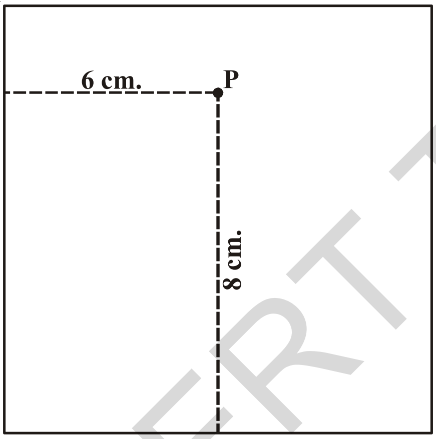
उपरोक्त उदाहरण में कितने संदर्भ दिए गए हैं? वे कौनसे हैं?

अब हम एक और परिस्थिति की चर्चा करेंगे।

अध्यापक ने विद्यार्थी को कागज की शीट पर बिन्दु लगाने के लिए कहा। अध्यापक ने उसे संकेत दिया की “बिन्दु के बायीं ओर से 6 सें.मी की दूरी पर होना चाहिए।” कुछ विद्यार्थीयों ने चित्र में दर्शाये अनुसार बिन्दु लगायें।



आपके आनुसार चित्र में कौन-सा बिन्दु सही होगा? जैसे कि सभी बिन्दु A,B,C तथा D बायीं ओर से 6 सें.मी की दूरी पर लगाये गये हैं। बिन्दु की सही स्थिती को जानने के लिए दूसरी कौन-सी जानकरी की आवश्यकता है? बिन्दु की सही स्थिति जानने के लिए हमें उसकी बायीं ओर से, निचे से तथा ऊपर से उसकी स्थिति की जानकारी आवश्यक हैं।



यदि अध्यापक ने कहा कि बायीं ओर से 6 सेंमी. तथा नीचे से 8 सेंमी. की दूरी पर बिन्दु लगाइए। अब इस जानकारी से आप कितने बिन्दु डाल सकते हैं?

केवल एक ही बिन्दु डाला जाएगा। अतः एक बिन्दु को डालने के लिए कितनी जानकारियों की आवश्यकता है?

एक बिन्दु की सही स्थिति को जानने के लिए हमें दो जानकारियों की आवश्यकता है। बिन्दु की स्थिति को (6,8) से दर्शाया जा सकता है। यदि आप कहते हैं कि “बिन्दु ऊपर से 7 सें.मी दूरी पर है” क्या आप बिन्दु की सही स्थिती को जान सकते हैं? इसकी चर्चा अपने मित्रों के साथ कीजिए।

इसे कीजिए

आपकी कक्षा में बैठे पाँच विद्यार्थीयों की स्थिति का निर्धारण करो।

क्रिया कलाप - वलय क्रिडा (Ring game)

क्या आपने नुमाइश में वलय क्रिडा (Ring game) को देखा है?हम किसी भी वस्तु पर रिंग फेंकते हैं वह पंक्ति और स्तंभों के रूप में होती है। इस चित्र का निरिक्षण कीजिए।

इस सारिणी को पूर्ण कीजिए।

वस्तु	स्तंभ	पंक्ति	स्थिति
पर्स	3	4	(3,4)
माचिस डिब्बा	....	3	(,3)
क्लीप	....	....	....
टेडी (भालू)	....	....	....
साबुन	....	....	....

क्या तीसरे स्तंभ तथा चौथे पंक्ति की वस्तु और चौथा स्तंभ और तीसरे पंक्ति की वस्तु एक ही है?

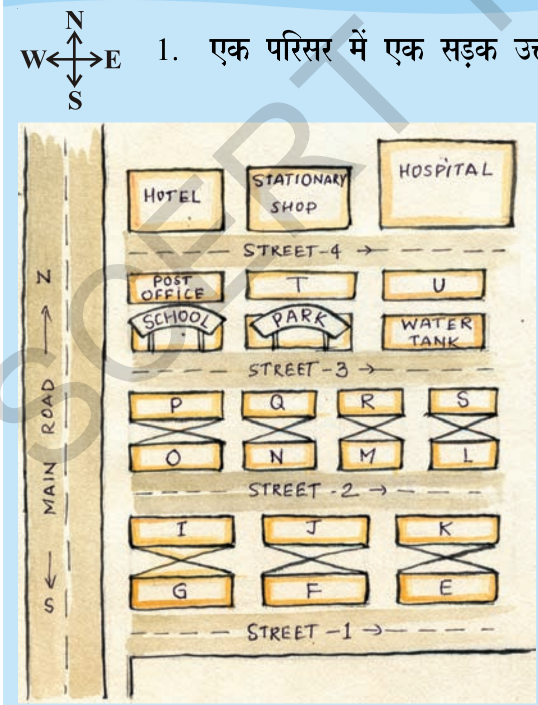
एक समतल पर दो जानकारियों के आधार पर बिन्दु निर्देशन से गणित की "निर्देशांक ज्यामिति" (Co-ordinate Geometry) की व्युत्पत्ति हुई।

रेने दकार्ते (Rene Descartes) (1596-1650), फ्रांस के गणितज्ञ तथा दार्शनिक ने निर्देशांक ज्यामिति को विकसीत किया था। उन्होंने बिजगणितीय समीकरण तथा ज्यामितीय वक्रों और चित्रों के बीच एक अटूट संबंध को पाया। इस अध्याय में हम बिन्दु को निर्देशांक समतल पर कैसे डाला जाता है उसकी चर्चा करेंगे

रेने दकार्ते

अभ्यास 5.1

1. एक परिसर में एक सड़क उत्तर तथा दक्षिण दिशा में जाती है। उसका मानचित्र दिया गया है। चित्र की सहायता से प्रश्नों को हल कीजिए।



(i) गली नं. 3 (Street No.3) में बायीं ओर से तीसरे स्थान पर क्या है?

(ii) गली नं. 2 (Street No. 2) के दूसरे घर का नाम क्या है?

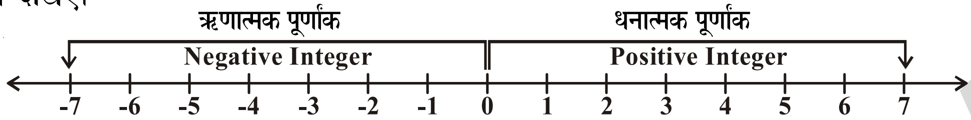
(iii) श्रीमान् K के घर की स्थिति को दर्शाओ।

(iv) डाक घर की स्थिति को आप कैसे दर्शाएंगे?

(v) अस्पताल की स्थिति को आप कैसे दर्शाएंगे?

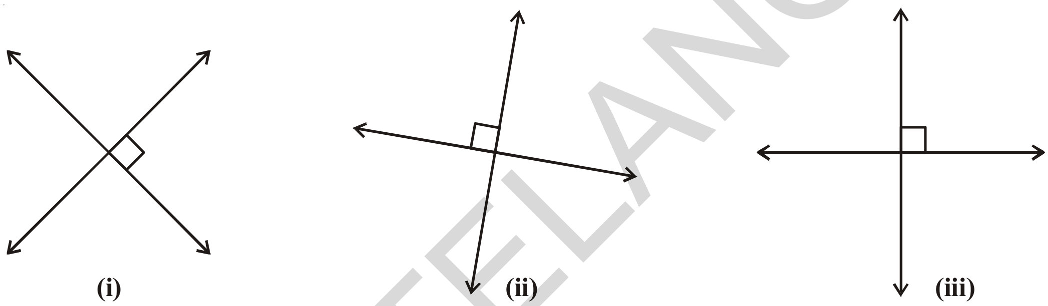
5.2 कार्तीय पद्धति (Cartesian System)

हम संख्या रेखा पर समान अन्तराल पर बिन्दुओं को लगाकर संख्या लिखते हैं। निचे दि गयी पूर्णांक रेखा को देखिए।

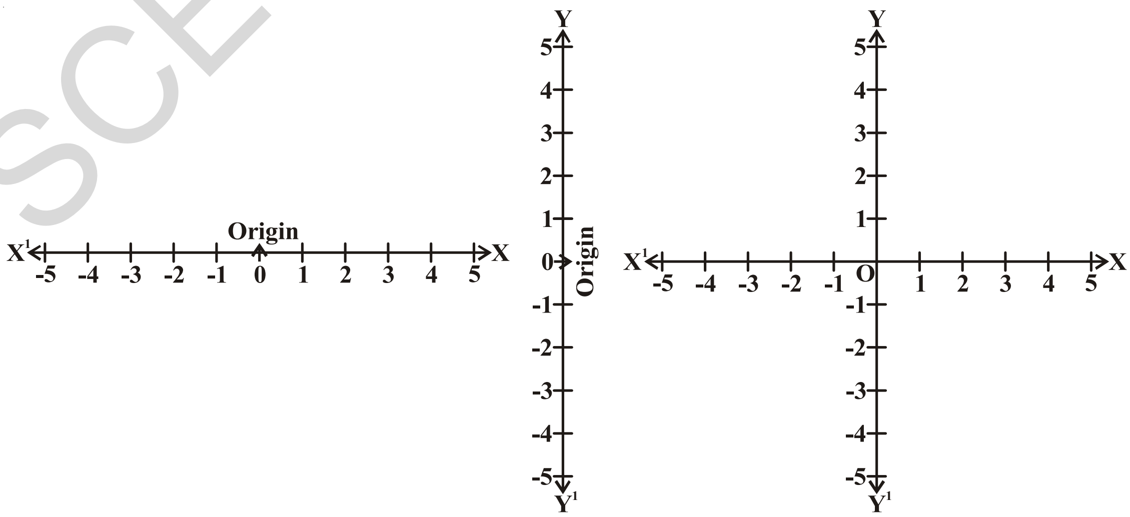


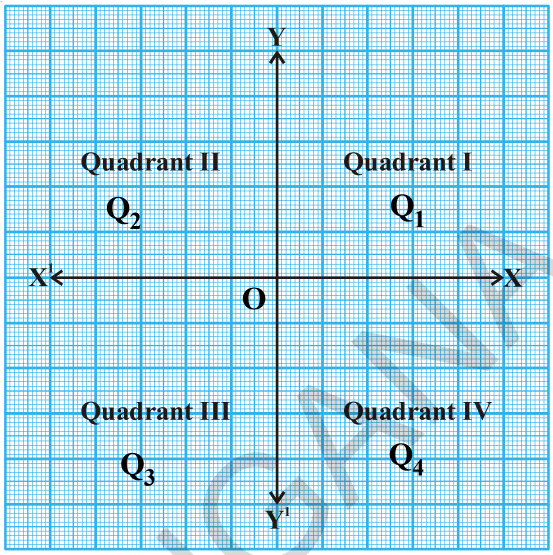
इसमें यह देखा गया की संख्या रेखा पर एक नियत बिन्दु से समान दूरियाँ अंकित की जाती है, उसे मूल बिन्दु (origin) कहते हैं तथा उसे 'O' से निरूपित करते हैं। सभी धनात्मक पुर्णांक को O से दायीं ओर तथा ऋणात्मक पुर्णांक को बायीं ओर अंकित किया जाता है।

हम एक तल पर दो संख्या रेखाओं को एक दूसरे पर लंब डालेंगे। बिन्दुओं के स्थान निर्धारण के लिए दोनों रेखाओं का उपयोग किया गया। जैसे कि चित्र में दिखाया गया है।



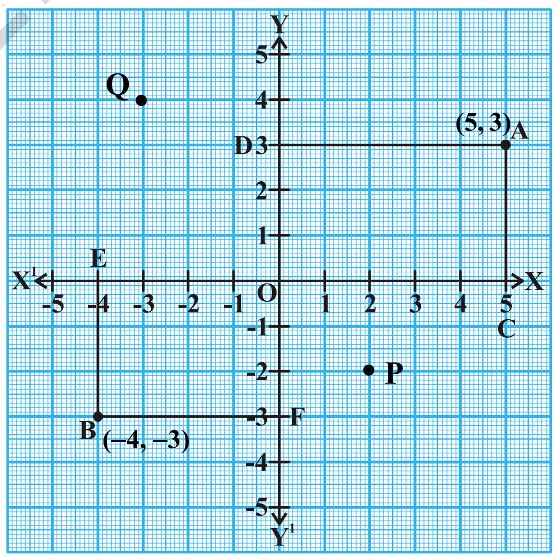
चित्र के अनुसार लम्ब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती है। लेकिन जब हमें बिन्दु का निरूपण करने के लिए इन दो रेखाओं को चुनेंगे तो हमारी सहुलियत के अनुसार चित्र (iii) के अनुरूप एक क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर रेखा को ही लेंगे। (हम एक क्षैतिज संख्या रेखा तथा एक ऊर्ध्वाधर संख्या रेखा एक दूसरे पर लम्ब होगा) उनका उपयोग बिन्दु निरूपण के लिए किया जाएगा। दोनों का प्रतिच्छेदक मूल बिन्दु कहलायेगा। क्षैतिज रेखा XX^1 को X-अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर रेखा YY^1 को Y-अक्ष कहते हैं।





XX^1 तथा YY^1 एक दूसरे को मूल बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करते हैं। उसे 'O' से निरूपित किया जाता है। $\overrightarrow{OX}$ की दिशा धनात्मक X-अक्ष उसी प्रकार $\overrightarrow{OY}$ धनात्मक Y-अक्ष होगा। तथा $\overrightarrow{OX}^1$ और $\overrightarrow{OY}^1$ को क्रमशः ऋणात्मक X-अक्ष तथा ऋणात्मक Y-अक्ष होगा। यहाँ आप देखते हैं कि ये दोनों अक्ष तल को चार भागों में विभाजित करती हैं इन चार भागों को चतुर्थांश (quadrants) कहते हैं तथा उन्हें Q_1, Q_2, Q_3 तथा Q_4 द्वारा घडी की विपरित दिशा से निरूपित किया जाता है। हम इस तल को कार्तीय तल (cartesian plane) (रेने दकार्ते के बाद नामांकित किया गया।) या निर्देशांक तल या XY-तल कहते हैं। अक्षों को निर्देशांक अक्ष (coordinate axes) कहा जाता है।

5.2.1 बिन्दु निरूपण (Locating Point)



अब हम देखेंगे कि निर्देशांक पद्धति में बिन्दु निरूपण कैसे किया जाता है? आलेख कागज (graph paper) पर दो अक्ष उतारेंगे। A तथा B उस पर डाले गये दो बिन्दु है। क्या आप बतायेंगे कि बिन्दु A और B किस क्रदान्त से संबंधित हैं?

बिन्दु A पहली क्रदान्त (Q_1) तथा बिन्दु B तीसरे क्रदान्त (Q_3) में अंकित है। अब हम जानेंगे कि A और B के अक्षों से दूरी कितनी होगी? इसके लिए X-अक्ष पर AC तथा Y-अक्ष पर AD लम्ब डाले गये। उसी प्रकार BE तथा BF चित्र में दर्शाये अनुसार लम्ब डाले गये।

हम देखेंगे

(i) Y-अक्ष से बिन्दु A की दूरी X-अक्ष की धनात्मक दिशा में AD=OC= 5 इ. इसे हम A के लिए X का निर्देशांक कहेंगे।

(ii) X-अक्ष से बिन्दु A की दूरी Y-अक्ष की धनात्मक दिशा में AC=OD=3 इ. होगी इसे हम A का Y निर्देशांक कहते हैं। इसलिए 'A' के निर्देशांक (5, 3) होंगे।

(iii) Y-अक्ष से बिन्दु B की लम्ब दूरी X-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में OE=BF= 4 इकाई अर्थात् X-अक्ष पर –4 होगा, इसे हम 'B' के लिए X निर्देशांक कहेंगे।

(iv) X-अक्ष से बिन्दु B की लम्ब दूरी Y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में OF = EB = 3 इकाई अर्थात् Y-अक्ष पर –3 होगा, इसे 'B' के लिए Y निर्देशांक कहेंगे। इसलिए 'B' के निर्देशांक (–4, –3) होंगे।

अब हम इन दूरियों की सहायता से बिन्दु को कैसे अंकित करेंगे? हम बिन्दुओं के निर्देशांकों को कुछ इस तरह लिखते हैं।

(i) एक बिन्दु का x-निर्देशांक (x-coordinate) मूल बिन्दु से X-अक्ष पर लम्ब दूरी होगी।

x-निर्देशांक को भुज (abscissa) भी कहा जाता है।

P का x-निर्देशांक (भुज) = 2.

Q का x-निर्देशांक (भुज) = –3.

(ii) एक बिन्दु का y-निर्देशांक मूल बिन्दु से Y-अक्ष पर लम्ब दूरी होगी।

y-निर्देशांक को कोटि (ordinate) भी कहा जाता है।

P का y-निर्देशांक (कोटि) = –2.

Q का y-निर्देशांक (कोटि) = 4.

अतः P के निर्देशांक (2, –2) तथा Q के निर्देशांक (–3, 4) होंगे।

अतः बिन्दु का निरूपण इस प्रकार किया जाता है।

5.2.2 मूल बिन्दू (Origin)

1. X तथा Y-अक्ष के प्रतिच्छेदक बिन्दु को मूलबिन्दु कहते हैं। तल पर किसी भी बिन्दु के निरूपण के लिए हम मूलबिन्दु का आधार लेते हैं।

उदाहरण-1. दिए गए बिन्दुओं के भुज तथा कोटि को बताकर प्रत्येक बिन्दु की स्थिति को समझाइए (i) P(8,8) (ii) Q (6,–8).

हल : (i) P (8,8)

भुज = 8 (x - निर्देशांक); कोटि = 8 (y - निर्देशांक)

बिन्दु P का भुज 8 इकाई होने के कारण वह मूल बिन्दू से धनात्मक दिशा में 8 इकाई की दूरी पर होगा। उसी प्रकार कोटि 8 इकाई होने के कारण Y-अक्ष की धनात्मक दिशा में मूल बिन्दु से 8 इकाई की दूरी पर होगा।

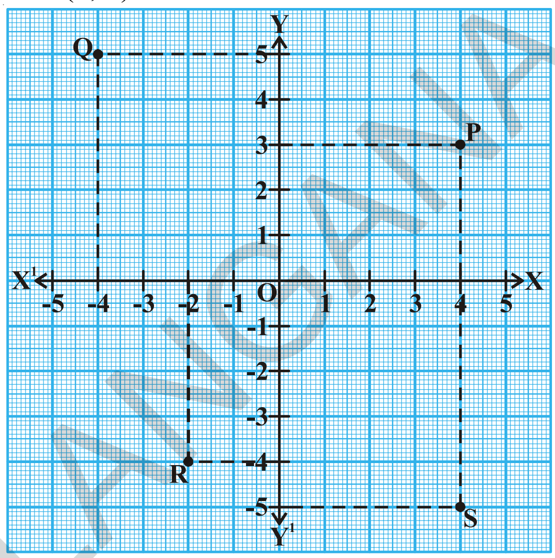
(ii) Q (6, –8)

भुज = 6 ; कोटि = –8

बिन्दु Q मूलबिन्दु से X-अक्ष की धनात्मक दिशा में 6 इकाई की दूरी पर होगा तथा मूलबिन्दु से Y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में -8 इकाई की दूरी पर होगा।

उदाहरण-2. आलेख में दिये गये बिन्दुओं के निर्देशांक को लिखिए।

हल : 1. बिन्दु P से X-अक्ष पर एक लम्ब खींचिए, वह रेखा X-अक्ष को 4 इ. पर स्पर्श करती है। इसलिए P का भुज 4 है। उसी प्रकार P से Y-अक्ष पर लम्ब खींचिए जो Y-अक्ष पर 3 इकाई पर स्पर्श करती है। इसलिए P के निर्देशांक (4, 3) होंगे।

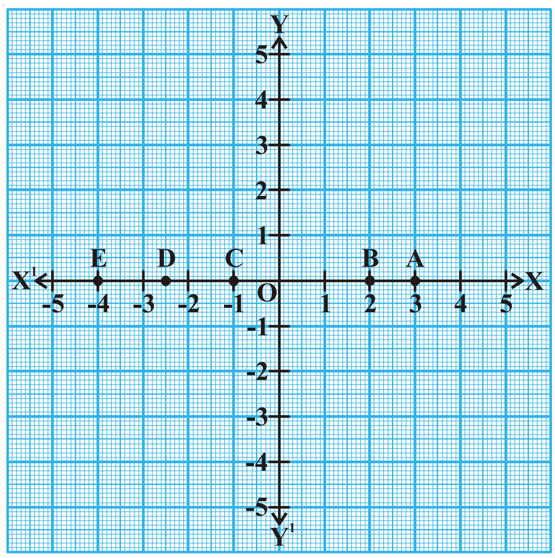


2. उसी प्रकार Q के भुज और कोटि क्रमशः –4 और 5 है। अतः Q के निर्देशांक (–4, 5) होंगे।

3. उपरोक्त स्थितियों के अनुसार भुज और कोटि R बिन्दु के लिए –2 और –4 हैं। अतः R के निर्देशांक (–2, –4) होंगे।

4. S बिन्दु के भुज और कोटि क्रमशः 4 और –5 है अतः S के निर्देशांक (4, –5) होंगे।

उदाहरण-3. आलेख में अंकित बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए।



हल : A बिन्दु Y-अक्ष से 3 इकाई दूरी पर है तथा X-अक्ष से शून्य दूरी पर है। अतः A का x निर्देशांक 3 तथा y-निर्देशांक 0 है। अतः A के निर्देशांक (3,0) होंगे। अब विचार सहित चर्चा कीजिए।

(i) B के निर्देशांक (2,0) होंगे, क्यों?

(ii) C के निर्देशांक (–1,0) होंगे, क्यों?

(iii) D के निर्देशांक (–2.5, 0) होंगे, क्यों?

(iv) E के निर्देशांक (–4,0) होंगे, क्यों? आपने क्या देखा?

जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है (X-अक्ष स्थित प्रत्येक बिन्दु को X-अक्ष से कोई दूरी नहीं होगी) इसलिए X-अक्ष पर अंकित बिन्दु का y निर्देशांक हमेशा शून्य ही होगा।

X-अक्ष निरूपण समीकरण $y = 0$ द्वारा किया जाता है।

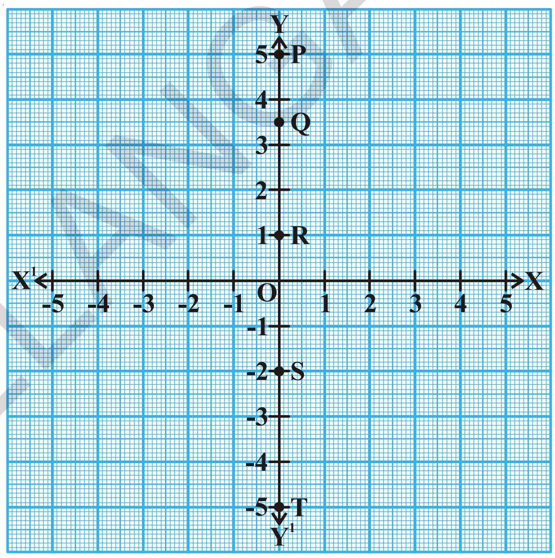
इसे कीजिए

दिये गये बिन्दुओं में से उन बिन्दुओं को पहचानिए जो X-अक्ष पर अंकित होते हैं।

(i)	(0,5)	(ii)	(0,0)	(iii)	(3,0)
(iv)	(-5,0)	(v)	(-2,-3)	(vi)	(-6,0)
(vii)	(0,6)	(viii)	(0,a)	(ix)	(b,0)

उदाहरण-4. नीचे दिये ग्राफ के निर्देशांक लिखिए।

हल :



(i) बिन्दु P, X-अक्ष से +5 इकाई की दूरी पर तथा Y-अक्ष से शून्य (0) इकाई की दूरी पर स्थित है अतः P का x-निर्देशांक 0 तथा y-निर्देशांक 5 है अतः P के निर्देशांक (0,5).

सोच विचार कर चर्चा कीजिए -

(ii) Q के निर्देशांक (0, 3.5), है। क्यों?

(iii) R के निर्देशांक (0,1), है। क्यों?

(iv) S के निर्देशांक (0, –2), है। क्यों?

(v) T के निर्देशांक (0, –5), है। क्यों?

जैसे कि सभी बिन्दुओं की Y-अक्ष से दूरी शून्य है इसलिए उनका x-निर्देशांक शून्य है। Y-अक्ष को समीकरण $x = 0$ द्वारा दर्शाया जाता है।

5.2.3 मूलबिन्दु के निर्देशांक

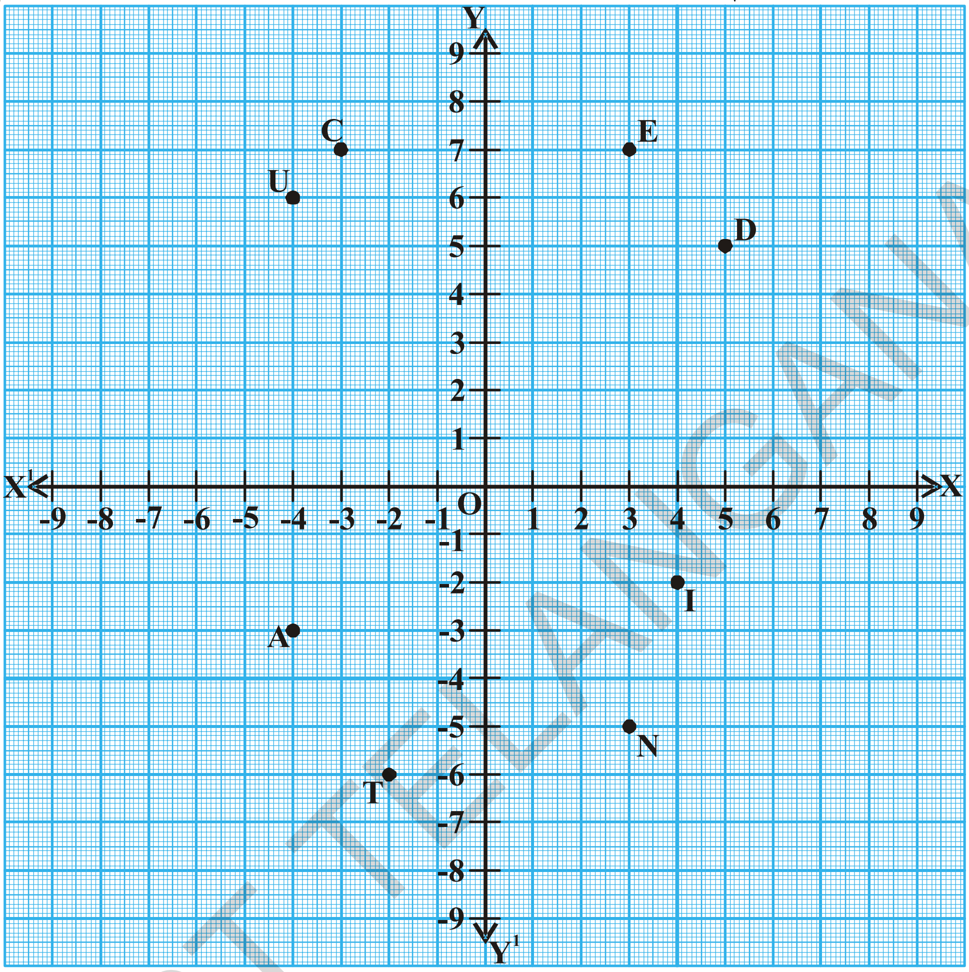
बिन्दु O, Y-अक्ष पर अंकित है इसलिए Y-अक्ष से उसकी दूरी शून्य है। इसलिए x-निर्देशांक शून्य होगा। और वह X-अक्ष पर भी अंकित होने से उसकी X-अक्ष से दूरी शून्य होती है। अतः उसका y-निर्देशांक भी शून्य ही होगा।

इसलिए मूलबिन्दु 'O' के निर्देशांक (0,0) है।

प्रयत्न करो

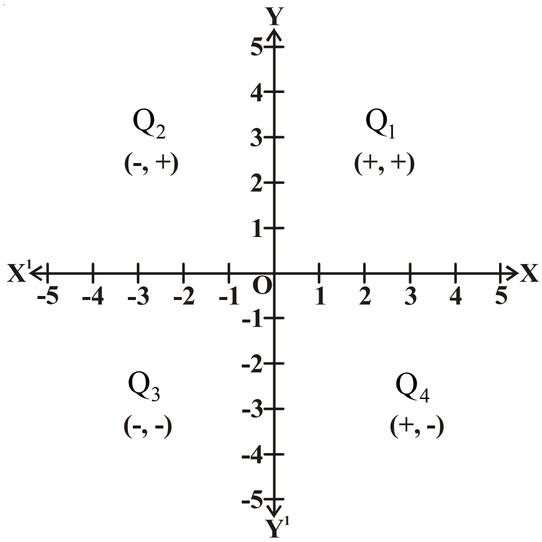
1. $(0, x)$ $(0, y)$ (0,2) और (0,–5) बिन्दु किस अक्ष पर अंकित होंगे और क्यों?
2. X-अक्ष पर अंकित बिन्दु का निरूपण कैसा होता है?

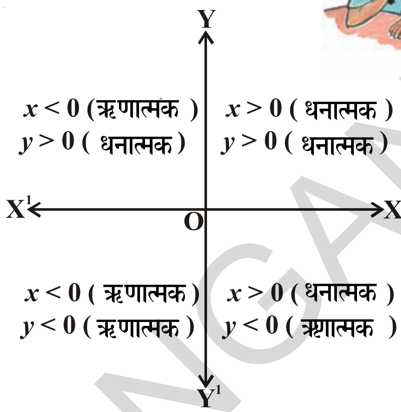
उदाहरण-5. दिये गये आलेख के आधार पर नीचे दी गई तालिका को पूरा करो।



बिन्दु	भुज	कोटि	निर्देशांक	क्रदांत	निर्देशांक के चिह्न
E	3	7	E (3,7)	Q_1	(+, +)
D	.....	.....	.....	.....	.....
U	–4	6	U (–4,6)	.....	(–,+)
C	.....	.....	.....	.....	.....
A	–4	–3	A (–4, –3)	.....	(–,–)
T	.....	.....	.....	.....	.....
I	4	–2	I (4, –2)	.....	(+,–)
O	.....	.....	.....	.....	.....
N	.....	.....	.....	.....	.....

उपरोक्त सारिणी से हमने यह देखा कि बिन्दुओं के निर्देशांक तथा चिह्नों और क्रदान्त के बीच संबंध होता है।





अभ्यास 5.2

1. नीचे दिए गए बिन्दुओं के क्रदान्त लिखिए?

   i) $(-2, 3)$ ii) $(5, -3)$ iii) $(4, 2)$ iv) $(-7, -6)$

   v) $(0, 8)$ vi) $(3, 0)$ vii) $(-4, 0)$ viii) $(0, -6)$

2. निम्नलिखित बिन्दुओं के भुज और कोटि को बताइए?

   i) $(4, -8)$ ii) $(-5, 3)$ iii) $(0, 0)$ iv) $(5, 0)$

   v) $(0, -8)$

   नोट : Plural of abscissa is abscissae.

3. कौनसे बिन्दु अक्षों पर स्थित होंगे लिखकर उनके अक्षों के नाम भी लिखिए।

   i) $(-5, -8)$ ii) $(0, 13)$ iii) $(4, -2)$ iv) $(-2, 0)$

   v) $(0, -8)$ vi) $(7, 0)$ vii) $(0, 0)$

4. आलेख के आधार पर प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

   i) L बिन्दु की कोटि

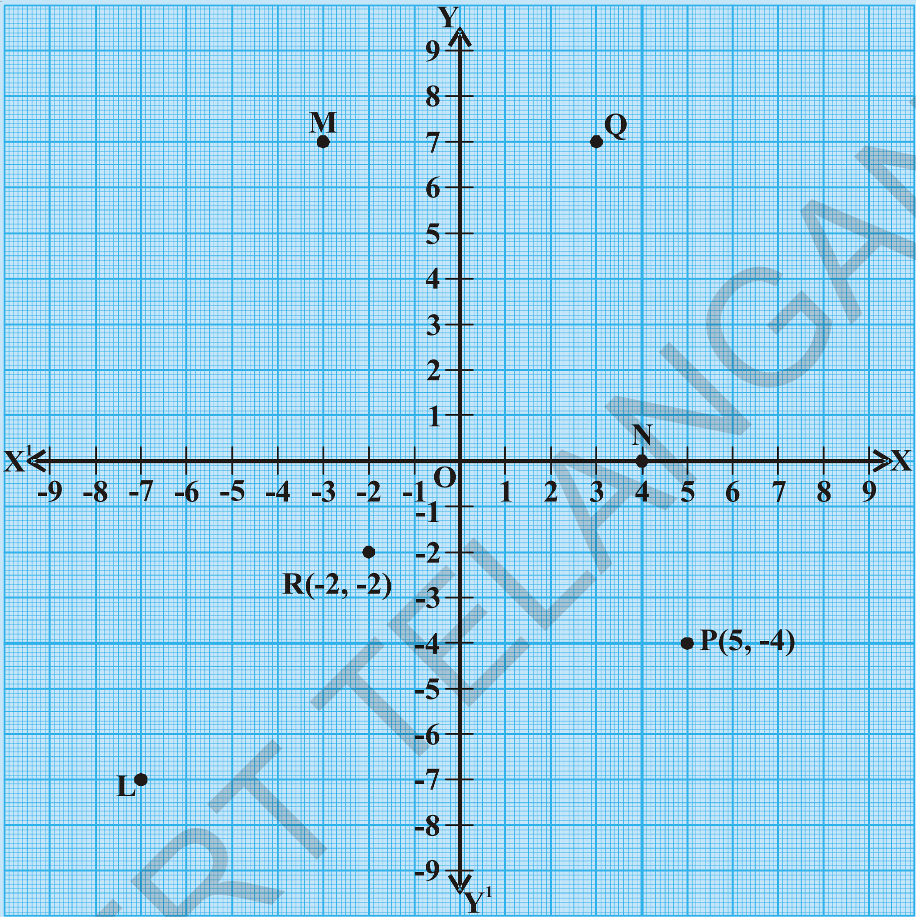
   ii) Q बिन्दु की कोटि

   iii) निर्देशांक $(-2, -2)$ द्वारा दर्शाया गया बिन्दु

iv) निर्देशांक (5, –4) द्वारा दर्शाया गया बिन्दु

v) N का भुज (abscissa)

vi) M का भुज



5. सत्य या असत्य लिखिए। यदी असत्य हो तो सत्य कथन लिखीए।

i. कार्तीय तल में क्षैतिज रेखा को Y - अक्ष कहते हैं।

ii. कार्तीय तल के ऊर्ध्वाधर रेखा को Y - अक्ष कहते हैं।

iii. बिन्दु जो दोनों अक्षों पर अंकित होता है उसे मूल बिन्दु कहते हैं।

iv. निर्देशांक (2, –3) तीसरे क्रदान्त में अंकित होता है।

v. (–5, –8) चौथे क्रदान्त में होता है।

vi. बिन्दु (–x , –y) पहले क्रदान्त में होगा जहाँ पर $x < 0$, $y < 0$ है।

6. निम्नलिखित बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर डालो। आपने क्या देखा?

i.. (1, 0), (3 , 0), (–2 , 0), (–5, 0), (0, 0), (5, 0), (–6, 0)

ii. (0, 1), (0 , 3), (0 , –2), (0, –5), (0, 0), (0, 5), (0, –6)

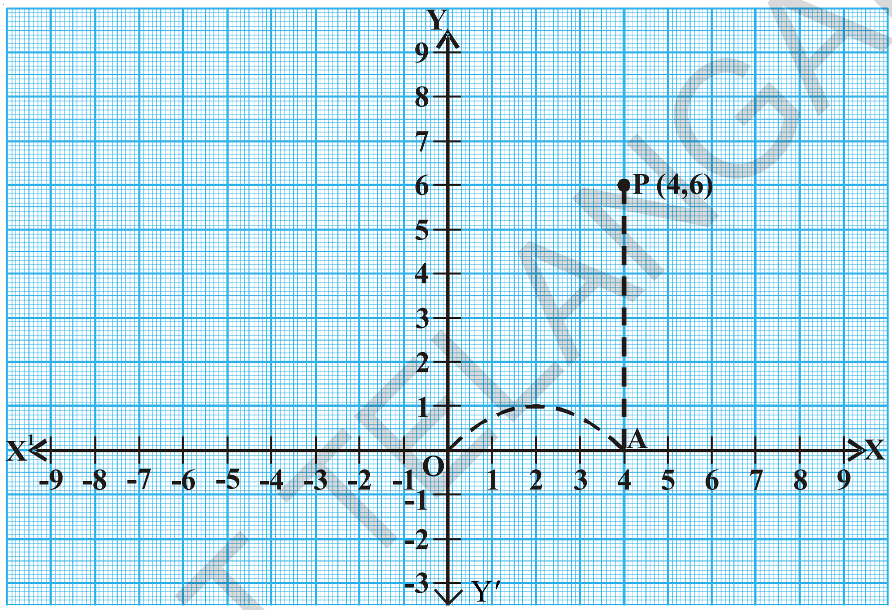
5.3 कार्तीय तल में एक बिन्दु आलेखित करना जबकि इसके निर्देशांक दिये हुए हों।

अभी तक हमने देखा तल पर डाले गये बिन्दु की स्थिति को कैसे पहचानते हैं हम सिखेंगे कि तल में इन बिन्दुओं को किस प्रकार अंकित करते हैं।

मान लीजिए निर्देशांक (4, 6) है उसको हम तल पर कैसे अंकित करेंगे।

क्या आप बता सकते हैं बिन्दु P किस क्रदान्त में अंकित होगा?

हम जानते हैं भुज (x-निर्देशांक) 4 है तथा कोटि (y-निर्देशांक) 6 है।



$\therefore$ बिन्दु P प्रथम क्रदान्त (Q_1) में उपस्थित है।

बिन्दु P (4, 6) को आलेखित करने की विधि इस प्रकार होगी।

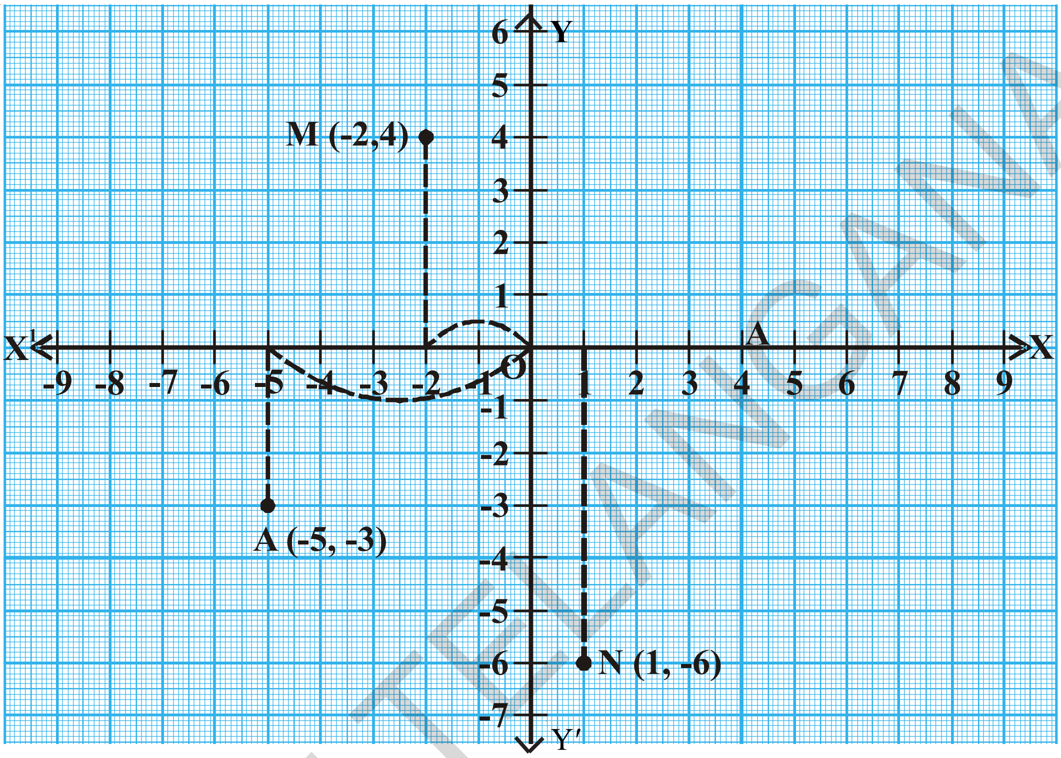
- ग्राफ पेपर पर दो संख्या रेखाओं को एक दूसरे पर लम्ब खीचो उनका प्रतिच्छेदक बिन्दु शून्य होता है। क्षैतिज रेखा को X-अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर रेखा को Y-अक्ष नाम दीजिए। उनके मूल बिन्दु को 'O' नाम दीजिए।
- x-निर्देशांक को ध्यान में रखते हुए मूल बिन्दु से शुरूवात कीजिए।
- X-अक्ष पर मूलबिन्दु से दायीं ओर 4 इकाई दूरी पर बिन्दु A अंकित कीजिए।
- A बिन्दु से 6 इकाई ऊपर की ओर Y-अक्ष की धनात्मक दिशा में आगे बढ़िये।
- 'P' को (4, 6) में निरूपित कीजिए।

उपरोक्तत विधि से कार्तीय तल में बिन्दु को अंकित करने की प्रक्रिया को हम "बिन्दु का आलेखन" (plotting the point) कहते हैं।

उदाहरण-7. कार्तीय तल में बिन्दुओं का आलेखन कीजिए।

(i) M (–2, 4), (ii) A (–5, -3), (iii) N (1, –6)

हल : X-अक्ष तथा Y-अक्ष को ग्राफ पर उतारिए।



(i) क्या आप बता सकते हैं कि बिन्दु M किस क्रदान्त में उपस्थित है?

चुकि $x<0$, $y>0$ वह दूसरे क्रदान्त में उपस्थित है। अब हम उसका आलेखन देखेंगे।

M (–2,4) शून्य से X-अक्ष के ऋणात्मक दिशा में 2 इकाई की दूरी तय कीजिए।

वहाँ से Y-अक्ष के समानान्तर ऊपर की ओर 4 इकाई दूरी लीजिए। तथा उसे M (–2,4) से दर्शाइए।

(ii) A (–5, –3) :

बिन्दु A तीसरे क्रदान्त में स्थित है।

शून्य से X-अक्ष पर बायी ओर ऋणात्मक दिशा में 5 इकाई की दूरी लीजिए।

वहाँ से नीचे की ओर Y-अक्ष के समानान्तर ऋणात्मक दिशा में 3 इकाई की दूरी लीजिए। तथा उसे A (–5, –3) से दर्शाइए।

(iii) N (1, –6): बिन्दु किस क्रदान्त में होगा?

बिन्दु N चौथे क्रदान्त में स्थित है

X-अक्ष पर शून्य से दायीं ओर 1 इकाई की दूरी लीजिए।

वहाँ से Y-अक्ष के ऋणात्मक दिशा में नीचे की ओर 6 इकाई की दूरी लीजिए। तथा उसे N (1, –6) से दर्शाइए।

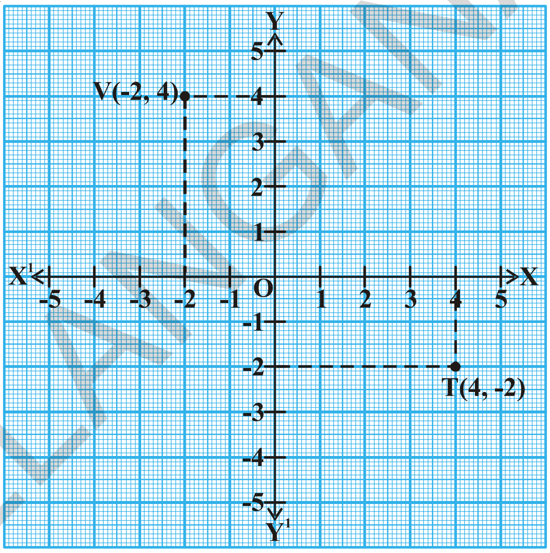
इसे हल कीजिए

कार्तीय तल पर बिन्दुओं को आलेखित कीजिए।

1. B (–2, 3) 2. L (5, –8) 3. U (6, 4) 4. E (–3, –3)

उदाहरण-8 : T(4, –2) और V(–2, 4) को कार्तीय तल पर आलेखित करो, क्या ये दोनों निर्देशांक एक ही बिन्दु पर स्थित होंगे?

हल : इस उदाहरण में हम दो बिन्दुओं को आलेखित कर रहे हैं। T (4, –2) तथा V(–2, 4)



क्या दोनों बिन्दु (4, –2) तथा (–2, 4) भिन्न है या एक? इस पर विचार कीजिए।

हम देखेंगे कि (4, –2) तथा (–2, 4) दोनों भिन्न स्थानों पर स्थित है। उपरोक्त क्रिया को इन बिन्दुओं से दोहराइए P (8, 3), Q(3, 8) तथा A (4, –5), B(–5 , 4) और बताइए क्या बिन्दु (x, y) बिन्दु (y, x) से भिन्न है या नही?

उपरी आलेखन इस तथ्य को प्रमाणित करता है कि (x, y) बिन्दु (y, x). से भिन्न होता है। अर्थात् (x, y) में उनका क्रम अत्यधिक महत्वपूर्ण है।

इसीलिए (x, y) को क्रमित युग्म कहते हैं।

यदि $x \neq y$, तो क्रमित युग्म (x, y) $\neq$ क्रमित युग्म (y, x).

यदि x = y, हो तो (x, y) = (y, x) होगा।

उदाहरण-9. बिन्दु A(2, 2), B(6, 2), C (8, 5) तथा D (4, 5) को ग्राॅफ पेपर पर आलेखित कर उन्हें एक दूसरे से मिलाकर समानान्तर चतुर्भुज बनाइए तथा उसका क्षेत्रफल ज्ञात करो?

हल: सभी दिए गए बिन्दु Q_1 में स्थित होंगे।

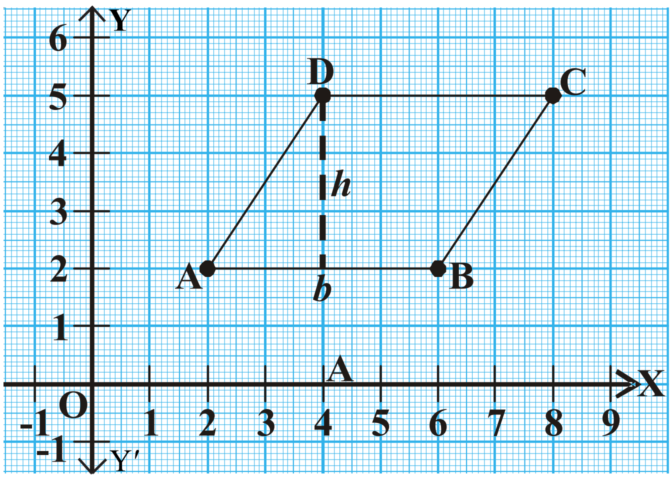
ग्राॅफ से आधार b = AB = 4 इकाई

ऊँचाई h = 3 इकाई

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= आधार × ऊँचाई

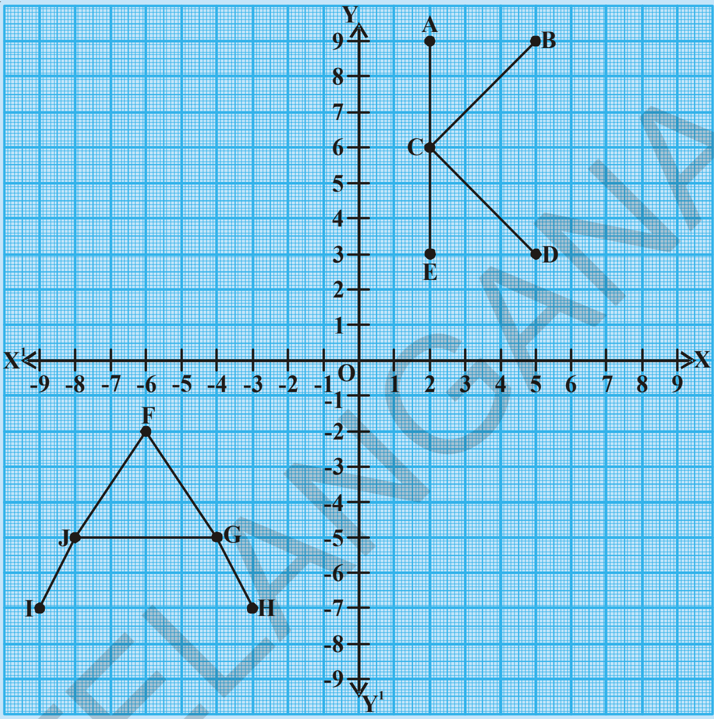
= 4 × 3 = 12 वर्ग इकाई।



इसे कीजिए

(i) A, B, C, D, E बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए।

(ii) F, G, H, I, J बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए।



अभ्यास 5.3

1. नीचे दिए गए x , y निर्देशांक वाले बिन्दुओं को कार्तीय तल पर आलेखित कीजिए।

x	2	3	–1	0	–9	–4
y	–3	–3	4	11	0	–6
(x, y)						

2. (5, –8) तथा (–8, 5) क्या दोनों बिन्दु एक ही स्थान पर उपस्थित होंगे। आपके उत्तर को प्रमाणित कीजिए।

3. (1, 2), (1, 3), (1, –4), (1, 0) तथा (1, 8). को आलेख पर निरूपित करो आप उनकी स्थिति के बारे में क्या कहेंगे?

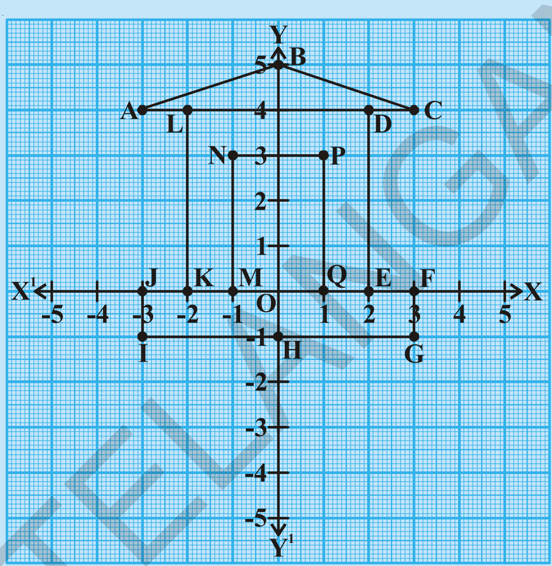
4. (5, 4), (8, 4), (3, 4), (0, 4), (–4, 4), (–2, 4)? बिन्दुओं की स्थिति के बारे में आप कहेंगे? कार्तीय तल पर इनका स्थान निर्धारण करके अपने उत्तर को निरूपित कीजिए।

5. बिन्दु (0, 0) (0, 3) (4, 3) (4, 0) को ग्रॉफ पेपर पर डालकर उनको क्रमबध्द सरल रेखाओं द्वारा जोड़कर आयत बनाइए तथा उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

6. बिन्दु (2, 3), (6, 3) तथा (4, 7) को ग्रॉफ पेपर पर निरूपण कीजिए उनको मिलाकर त्रिभुज बनाइए तथा उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

7. निर्देशांकों का योगफल 5 लेते हुए किन्हीं 6 बिन्दुओं को ग्रॉफ पेपर पर निरूपित कीजिए?
उदा : (–2, 7) (1, 4) ....

8. ग्रॉफ को देखकर A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, L, M. N, P, O तथा Q के निर्देशांकों को लिखिए।



9. बिन्दुओं को आलेखित कर, उन्हें रेखाखण्ड द्वारा मिलाइए।

i. (2, 5), (4, 7) ii. (–3, 5), (–1, 7)
iii. (–3, –4), (2, –4) iv. (–3, –5), (2, –5)
v. (4, –2), (4, –3) vi. (–2, 4), (–2, 3)
vii. (–2, 1), (–2, 0)

उसी ग्रॉफ पर इन बिन्दुओं को आलेखित कर उन्हें रेखाखण्ड द्वारा मिलाइए।

viii. (–3, 5), (–3, 4) ix. (2, 5), (2, –4)
x. (2, –4), (4, –2) xi. (2, –4), (4, –3)
xii. (4, -2), (4, 7) xiii. (4, 7), (–1, 7)
xiv. (–3, 2), (2, 2)

आप एक आश्चर्यजनक चित्र पायेंगे, वह क्या है?

क्रिया कलाप

विभिन्न शहर जैसे हैदराबाद, नई दिल्ली, चेन्नाई तथा विशाखापट्टणन की स्थिति का गोलार्ध (globe) पर अक्षांश तथा रेखांश की सहायता से अध्ययन कीजिए।

निर्माणात्मक क्रिया कलाप

एक ग्रॉफ पेपर में उनके अक्षों पर दिये गये बिन्दु आलेखित कर उन्हें सरल रेखा से मिलाइए।

(1, 0) (0.9) ; (2, 0) (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);

(5, 0) (0.5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2) ; (9, 0) (0, 1).

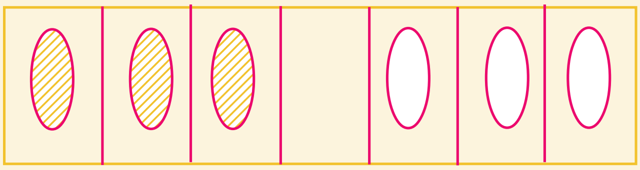
इन बिन्दुओं से चित्र को पूर्ण कीजिए, आपने क्या देखा?

हमने क्या सीखा?

- एक तल में बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो जानकारियों की आवश्यकता होती है।
- एक तल में एक वस्तु या एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो लंब रेखाओं की आवश्यकता होती है जिसमें एक क्षैतिज (X-अक्ष) होती है और दूसरी ऊर्ध्वाधर (Y-अक्ष) होती है।
- कार्तीय तल को रेने डिस्कारटस के बाद यह नाम दिया गया।
- अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु कहा जाता है। मूल बिन्दु के निर्देशांक (0,0) होते है।
- क्रमित युग्म (x, y) क्रमित युग्म (y, x) से भिन्न होता है।
- X-अक्ष को समीकरण y = 0 द्वारा दर्शाया जाता है।
- Y-अक्ष को समीकरण x = 0 द्वारा दर्शाया जाता है।

दिमागी खेल

नीचे दिए गए पत्तों की स्थिति से पहेली को सुलझाओ।



सफेद पत्तों को छायांकित पत्तों की जगह पर स्थानांतरित कीजिए। निम्न बातों का ध्यान रखिए : (1) एक रंग वाले पत्तों की अदला बदली नहीं हो सकती। (2) एक समय में सिर्फ एक ही पत्ता, एक स्थान ही लेना चाहिए।

न्यूनतम परिवर्तन 15 से 20 बार हो सकता है। क्या आप इसे और अच्छी तरह से कर सकते हैं? खेल को और रोचक बनाने के लिए पत्तों की संख्या को बढाइए।

06

दो चरराशि वाले रैखिक समीकरण
(LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES)

6.1 परिचय

हम निम्न प्रकार के कई समस्याओं का सामना करते हैं जैसे

(i) यदि पाँच पेनों का मूल्य 60 रु., तो एक पेन का मूल्य ज्ञात करो।

(ii) सात में एक संख्या जोड़ने पर 51 आता है तो उस संख्या को ज्ञात करो।

यहाँ पर (i) स्थिति में पेन की कीमत अज्ञात है, (ii) स्थिति में संख्या अज्ञात है। इस प्रकार के प्रश्नों को कैसे हल करते हैं? हम x, y या z इस प्रकार के अक्षर अज्ञात राशी के लिए उपयोग करते हैं और इस प्रकार के समीकरणों को लिखते हैं।

स्थिति (i) के लिए हम लिखेंगे

$5 \times$ पेन की कीमत $= 60$

यदि पेन की कीमत y रु. है

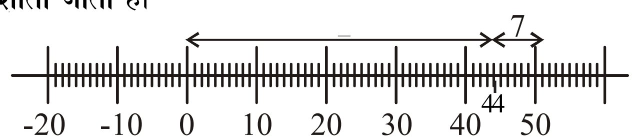
तो, $5y = 60$

अब, y का मूल्य ज्ञात कीजिए

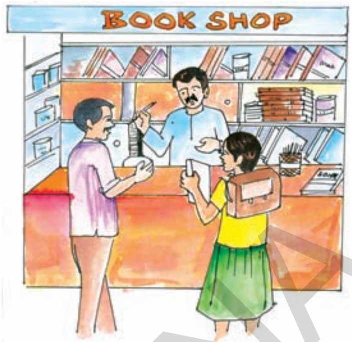
इसी प्रकार स्थिति (ii) के लिए भी समीकरण बना सकते हैं और अपरिचित संख्या को ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार के समीकरण को रैखिक समीकरण कहते हैं।

समीकरण जैसे $x + 3 = 0$, $x + \sqrt{3} = 0$ और $\sqrt{2}x + 5 = 0$ ये सभी एक चर वाले रैखिकराशि समीकरण के उदाहरण है आपको यह भी मालूम होगा कि इस समीकरण अद्वितीय (एक सिर्फ एक ही) हल होता है। आपको यह भी मालूम होगा की हल को संख्या रेखा पर किस प्रकार दर्शाते हैं।

हनिफ ने स्थिती (ii) के हल को संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाता जाता है।



6.2 दो चर राशियों में रैखिक समीकरण



अब इस स्थिती का निरिक्षण कीजिए

एक दिन काव्या अपने पिताजी के साथ 4 नोटबुक्स और दो पेन खरीदने के लिए गई। उसके पिताजी इन सभी वस्तुओं के लिए 100 रु. दिए।

काव्या को पेन और नोटबुक की कीमत नहीं मालूम। क्या इस स्थिति को हम समीकरण का रूप दे सकते है?

यहाँ पर एक पेन और एक नोटबुक की कीमत ज्ञात नही हैं। इस प्रकार दो अज्ञात राशियाँ हैं, इसे हम x और y से सूचित करते हैं। अतः एक नोट बुक की कीमत x रु. और एक पेन की किमत y रुपये।

इसे हम समीकरण के रूप में इस प्रकार से लिख सकते हैं $4x + 2y = 100$,

क्या आप x और y राशी के घातांको को समीकरण में देख सकते हो?

इस प्रकार यह 'x' और 'y' चर राशिवाला रैखिक समीकरण है।

वह समीकरण जिसकी दो चर राशियाँ x और y हो उसे दो चर राशियाँ वाला रैखिक समीकरण कहते हैं।

$4x + 2y = 100$ दो चर राशियों वाला रैखिक समीकरण का उदाहरण है।

अधिकतर चरराशियों 'x' और 'y' से दर्शाया जाता है। लेकिन कुछ अन्य अक्षरों भी उपयोग कर सकते है।

$p + 3q = 50$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v = \sqrt{11}$, $\frac{s}{2} - \frac{t}{3} = 5$ और $3 = \sqrt{5}x - 7y$ ये सभी दो चर राशी वाले रैखिक समीकरण के उदाहरण है।

नोट कीजिए कि उपरी समीकरणों को आप क्रमशः इस प्रकार भी लिखा सकते है $p + 3q - 50 = 0$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v - \sqrt{11} = 0$, $3s - 2t - 30 = 0$ तथा $\sqrt{5}x - 7y - 3 = 0$.

x, y दो चर राशियों वाला सामान्य समीकरण $ax + by + c = 0$ होगा जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ होंगी तथा a और b का मूल्य एक साथ शून्य नहीं हो सकता है। $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

उदाहरण-1. सचिन तथा सहवाग ने एक साथ 137 रनों की पारी खेली। इस जानकारी को समीकरण रूप में दर्शाइए।

हल : मान लिजिए सचिन द्वारा बनाये गये रन 'x' तथा सहवाग द्वारा बनाये गये रन 'y' है।

ऊपर के दिए गए कथन को समीकरण के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं।

$x + y = 137$

उदाहरण-2. हेमा की आयु मेरी की आयु की 4 गुन है। इस सूचना को दो चर राशि वाले समीकरण में लिखिए।

हल : मानलो हेमा की आयु 'x' वर्ष और मेरी की आयु 'y' वर्ष होगी,

यदि मेरी की आयु y हो तो हेमा की आयु '$4y$' होगी

दिए गए प्रश्न के अनुसार $x = 4y$

$\Rightarrow x - 4y = 0$ (कैसे?)

उदाहरण-3. एक संख्या, उसके अंकों को बदलने पर मिलने वाली संख्या से 27 अधिक है। यदि इकाई तथा दहाई के स्थानों पर क्रमशः x और y लेकर इस संख्या को रैखिक समीकरण के रूप में लिखिए।

हल : इकाई को x दहाई को y से सूचित करते हैं, अतः संख्या 10y + x.

यदि हम स्थानें को बदल दें तो नई संख्या 10x + y.

दि गई सूचना के अनुसार,

(दो अंकों की संख्या) – (अंकों का स्थान बदलने के बाद) = 27.

i.e., $10y + x - (10x + y) = 27$

$\Rightarrow 10y + x - 10x - y - 27 = 0$

$\Rightarrow 9y - 9x - 27 = 0$

$\Rightarrow y - x - 3 = 0$

$\Rightarrow x - y + 3 = 0$ आवश्यक समीकरण होगा।

उदाहरण-4. प्रत्येक समीकरण को $ax + by + c = 0$ इस रूप में लिखो a, b और c के मूल्य लिखिए।

i) $3x + 4y = 5$ ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$

iii) $3x = y$ iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$

v) $3x - 7 = 0$

हल : (i) $3x + 4y = 5$ उसे इस प्रकार लिख सकते।

$3x + 4y - 5 = 0.$

यहाँ $a = 3, b = 4$ तथा $c = -5.$

(ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$ को इस प्रकार लिख सकते,

$1.x - \sqrt{3}y - 5 = 0.$

यहाँ $a = 1, b = -\sqrt{3}$ तथा $c = -5.$

(iii) समीकरण $3x = y$ को इस प्रकार लिख सकते है।

$3x - y + 0 = 0.$

यहाँ $a = 3, b = -1$ और $c = 0.$

(iv) समीकरण $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$ को इस प्रकार लिख सकते है।

$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{6} = 0;$

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ और $c = \frac{-1}{6}$

(v) $3x - 7 = 0$ को इस प्रकार लिख सकते।

$3x + 0.y - 7 = 0.$

$a = 3, b = 0; c = -7$

उदाहरण-5. प्रत्येक समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखकर, और a, b और c के मूल्यों को लिखिए।

i) x = –5

ii) y = 2

iii) 2x = 3

iv) 5y = –3

हल :

क्र.सं.	दिया गया समीकरण	$ax + by + c = 0$ के रूप में	a, b, c का मूल्य		
			a	b	c
1	$x = -5$	$1.x + 0.y + 5 = 0$	1	0	5
2	$y = 2$	$0.x + 1.y - 2 = 0$	0	1	–2
3	$2x = 3$	---	---	---	---
4	$5y = -3$	----	----	---	---

प्रयत्न कीजिए

1. दिए गए रैखिक समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखो और a, b और c के मूल्यों को लिखिए।

i) $3x + 2y = 9$ ii) $-2x + 3y = 6$ iii) $9x - 5y = 10$

iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 5 = 0$ v) $2x = y$

अभ्यास - 6.1

1. दिए गए रैखिक समीकरणों को $ax+by+c=0$ के रूप में लिखो और प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मूल्य ज्ञात करो।

i) $8x + 5y - 3 = 0$ ii) $28x - 35y = -7$ iii) $93x = 12 - 15y$

iv) $2x = -5y$ v) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$ vi) $y = \frac{-3}{2}x$

vii) $3x + 5y = 12$

2. प्रत्येक रैखिक समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखो और a, b और c का मूल्य ज्ञात करो।

i) $2x = 5$ ii) $y - 2 = 0$ iii) $\frac{y}{7} = 3$ iv) $x = \frac{-14}{13}$

3. दिए गए कथनों को दो चरराशि वाले रैखिक समीकरण के रूप में लिखिए।
   (i) दो संख्याओं का योग 34.
   (ii) एक फांटेन पेन के आधे मूल्य से एक बाल पेन का मूल्य 5 ₹ कम है।
   (iii) भारगवी को सिंधु के दुगने से 10 अंक ज्यादा मिले।
   (iv) एक पेंसिल का मूल्य 2 ₹ और एक बाल पेन का मूल्य 15 ₹ शीला ने पेंसिल और पेन के लिए 100 ₹ दिये।
   (v) IX वी. कक्षा की दो छात्राएँ यामिनी तथा फातिमा ने मिलकर प्रधानमंत्री सहायता कोश के लिए 200/- ₹ का अनुदान दिया।
   (vi) दो अंकों की संख्या और अंकों का स्थान बदलने पर आने वाली संख्या का योग 121 है। यदि इकाई के स्थान पर 'x' और दहाई के स्थान पर 'y' हो तो उस संख्या का समीकरण लिखिए।

6.3 दो चर राशि वाले रैखिक समीकरणों के हलः

हमें मालूम है कि एक चर राशि वाले रैखिक समीकरण का अद्वितीय हल होता है।

$3x - 4 = 8$ इस समीकरण का हल क्या होगा?

$3x - 2y = 5$ समीकरण को देखिए

दो चर राशियों के रैखिक समीकरण के हल के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या इस हल में केवल एक ही मूल्य होता है। एक से अधिक अब हम इसके बारे में समझेंगे।

क्या $x = 3$ इस समीकरण का हल होगा?

$x = 3$ को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर,

$$3(3) - 2y = 5$$

$$9 - 2y = 5$$

अभीतक, इस समीकरण का हल ज्ञात नहीं हुआ। अतः हल मालूम करने के लिए, 'x' के साथ 'y' के मूल्य की भी आवश्यकता होती है। y का मूल्य ऊपर दिए गए समीकरण $9 - 2y = 5$. $\Rightarrow$ $2y = 4$ या $y = 2$ ज्ञात होगा।

समीकरण $3x - 2y = 5$ में $x = 3$ और $y = 2$, को प्रतिस्थापित करने पर समीकरण संतुष्ट होता है। अतः दो चर राशियों के रैखिक समीकरण को संतुष्ट करने के लिए हमें दो मूल्यों की आवश्यकता होती है एक 'x' और दुसरी y.

'x' और 'y' की कोई भी जोड़ी जो रैखिक समीकरण को संतुष्ट करते हैं। उन्हें उसका हल कहते हैं।

हमने देखा कि $x = 3, y = 2$, समीकरण $3x - 2y = 5$ का हल है। क्रमित युग्म या क्रमित जोड़ी (3, 2) में प्रथम मूल्य 'x' और दुसरा मूल्य 'y'होता है। क्या इस समीकरण के लिए कोई और हल है? आपके अनुमान से $x = 4$ मूल्य लो और समीकरण में प्रस्थापित करो $3x - 2y = 5$. इस प्रकार समीकरण $12 - 2y = 5$ के रूप में होगा। जो एक चर राशि वाला का समीकरण है इसे हल करने पर यह प्राप्त होगा।

$$y = \frac{12-5}{2} = \frac{7}{2}\,,\quad \text{अतः } \left(4, \frac{7}{2}\right), 3x - 2y = 5 \text{ का दुसरा हल है।}$$

क्या $3x - 2y = 5$ के लिए कोई और हल है? $(1, -1)$ मूल्य लगाकर देखो। क्या $(1, -1)$ दुसरा हल होगा?

अतः दो चर राशियों के रैखिक समीकरण में हमें बहुत सारे हल प्राप्त होते हैं।

नोट : हल को सरलता से प्राप्त करने के लिए $x = 0$ लगाकर उससे संबंधित 'y'का मूल्य प्राप्त करेंगे, उसी प्रकार $y = 0$ लगाकर उससे संबंधित 'x' का मूल्य ज्ञात करेंगे।

इसे हल कीजिए

5 जोड़ी मूल्य लेकर ऊपर दिए गए समीकरण को हल करो।

उदाहरण-6. $4x + y = 9$ समीकरण के लिए चार अलग अलग हल ज्ञात कीजिए। तालिका को आवश्यकता अनुसार पूर्ण कीजिए।

हल :

क्रम संख्या	x या y चर राशी का चुनाव	सरलीकरण		हल
1.	$x = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 0 + y = 9$ $\Rightarrow y = 9$	(0,9)
2.	$y = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4x + 0 = 9$ $\Rightarrow 4x = 9$ $\Rightarrow x = 9/4$	$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$
3.	$x = 1$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 1 + y = 9$ $\Rightarrow 4 + y = 9$ $\Rightarrow y = 5$	——
4.	$x = -1$		———	$(-1, 13)$

$\therefore$ $(0, 9), \left(\frac{9}{4}, 0\right), (1, 5)$ और $(-1, 13)$ ऊपर दिए गए समीकरण के कुछ और हल हैं।

उदाहरण-7. निम्न में से कौनसे मूल्य समीकरण $x + 2y = 4$ को संतुष्ट करते है? (आवश्यकता अनुसार तालिका का उपयोग कीजिए)

i) $(0, 2)$ ii) $(2, 0)$ iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

v) $(1, 1)$ vi) $(-2, 3)$

हल : हमें मालूम है कि यदि LHS = RHS तो एक क्रमित जोड़ी का मूल्य प्रतिस्थापन करने से हल प्राप्त होता है।

दिया गया समीकरण $x + 2y = 4$

क्र. सं.	क्रमित युग्म	LHS का मूल्य	RHS का मूल्य	LHS और RHS में संबंध	हल है/ हल नहीं है।
1.	$(0, 2)$	$x + 2y = 0 + (2 \times 2)$ $= 0 + 4 = 4$	4	$\therefore$ LHS=RHS	$\therefore (0, 2)$ युग्म हल है।
2.	$(2, 0)$	$x + 2y = 2 + (2 \times 0)$ $= 2 + 0 = 2$	4	......	(2,0) क्रमित युग्म हल नहीं है।
3.	$(4, 0)$	$x + 2y = 4 + (2 \times 0)$ $= 4 + 0 = 4$	4	LHS = RHS	___
4.	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$	$x + 2y = \sqrt{2} + 2(-3\sqrt{2})$ $= \sqrt{2} - 6\sqrt{2}$ $= -5\sqrt{2}$	___	LHS $\neq$ RHS	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ क्रमित युग्म नहीं है।
5.	$(1, 1)$	___	4	LHS $\neq$ RHS	(1, 1) क्रमित युग्म हल नहीं है।
6.	___	$x + 2y = -2 + (2 \times 3)$ $= -2 + 6 = 4$	4	LHS = RHS	(–2, 3) क्रमित युग्म हल है।

उदाहरण-8. यदि $x = 3, y = 2$ समीकरण $5x - 7y = k$ का हल है तो k का मूल्य ज्ञात कीजिए और परिणामी (result) समीकरण को लिखिए।

हल : यदि $x = 3, y = 2$ समीकरण का हल है,

$$5x - 7y = k \text{ तो } 5 \times 3 - 7 \times 2 = k$$
$$\Rightarrow 15 - 14 = k$$
$$\Rightarrow 1 = k$$
$$\therefore k = 1$$

परिणामी समीकरण $5x - 7y = 1$.

उदाहरण-9. यदि $x = 2k + 1$ और $y = k$ समीकरण $5x + 3y - 7 = 0$ को संतुष्ट करता है तो k का मूल्य ज्ञात करो।

हल : $x = 2k + 1$ और $y = k$ दिया गया है। समीकरण $5x + 3y - 7 = 0$ का मूल्य x और y का मूल्य प्रतिस्थापित करने से,

$$\Rightarrow 5(2k + 1) + 3k - 7 = 0$$
$$\Rightarrow 10k + 5 + 3k - 7 = 0$$
$$\Rightarrow 13k - 2 = 0 \text{ (रेखीय समीकरण एक चर राशी में).}$$
$$\Rightarrow 13k = 2$$
$$\therefore k = \frac{2}{13}$$

अभ्यास - 6.2

1. दिए गए समीकरण में तीन अलग-अलग हल ज्ञात कीजिए।
   i) $3x + 4y = 7$ ii) $y = 6x$ iii) $2x - y = 7$
   iv) $13x - 12y = 25$ v) $10x + 11y = 21$ vi) $x + y = 0$
2. यदि (0, a) और (b, 0) दिए गए रैखिक समीकरण के हल है तो 'a' और 'b' ज्ञात करो :-
   i) $8x - y = 34$ ii) $3x = 7y - 21$ iii) $5x - 2y + 3 = 0$
3. $2x - 5y = 10$ इस समीकरण का हल निम्न में से कौनसा है?
   i) (0, 2) ii) (0, –2) iii) (5, 0) iv) $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ v) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
4. 'k' का मूल्य ज्ञात करो, यदि $x = 2, y = 1$ समीकरण $2x + 3y = k$ को परिणामी समीकरण के और दो हल ज्ञात कीजिए।

5. यदि $x = 2 - a$ और $y = 2 + a$ समीकरण $3x - 2y + 6 = 0$ का साधन समुच्चय है। तो 'a'. का मूल्य ज्ञात कीजिए।
6. यदि $x = 1, y = 1$ समीकरण $3x + ay = 6$ के साधन समुच्चय है तो 'a' का मूल्य ज्ञात कीजिए।
7. पाँच अलग-अलग दो चर राशियों के रैखिक समीकरण ज्ञात करो। प्रत्येक के साधन समुच्चय ज्ञात कीजिए।

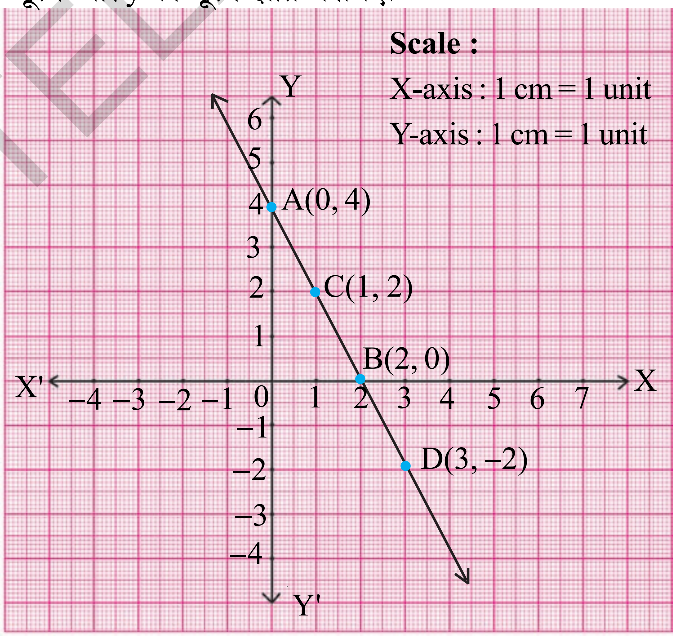
6.4 दो चर राशियों के रैखिक समीकरणों के आलेख

हमने देखा कि प्रत्येक दो चर राशि वाले समीकरणों के एक से अनेक हल प्राप्त होते हैं। क्या हम रैखिक समीकरणों के संभव साधन समुच्चयी को आलेख पर दर्शा सकते है? हम जानते हैं कि प्रत्येक साधन समुच्चय वास्तविक संख्याओं का क्रमित युग्म होता है अतः हम आलेख पर बिन्दु रूप में दर्शा सकते है।

दो चर राशयों के रैखिक समीकरण $4 = 2x + y$ में, उसे $y = 4 - 2x$ इस प्रकार से भी लिख सकते। इस समीकरण में 'y' का मूल्य ज्ञात कर सकते है x के मूल्य के लिए। उदाहरण के लिए यदि $x = 2$ तो $y = 0$, इसिलिए (2, 0) साधन समुच्चय है। इस प्रकार से कई साधन समुच्च हल कर सकते हैं। इस प्रकार साधन समुच्चय तालिका में दिए गए 'x' के मूल्य और y का मूल्य ज्ञात कीजिए।

तालिका द्वारा हल :

x	y = 4 – 2x	(x, y)
0	y = 4 – 2(0) = 4	(0, 4)
2	y = 4 – 2(2) = 0	(2, 0)
1	y = 4 – 2(1) = 2	(1, 2)
3	y = 4 – 2(3) = –2	(3, –2)



हम यह देखते हैं कि प्रत्येक x के लिए एक मूल्य y है। मानलो X-अक्ष में 'x' का मूल्य लो और Y-अक्ष में y का मूल्य लो। (0, 4), (2, 0), (1, 2) और (3, -2) इन सभी बिन्दुओं को आलेख पर निरूपित करो। इन में से किन्हीं दो बिन्दुओं को जोड़ने पर रेखा AD प्राप्त होती है।

यदि $x = 0$;
$y = 4 - 2x = 4 - 2(0) = 4$
यदि $x = 2$
$y = 4 - 2(2) = 0$

क्या दूसरे अन्य बिन्दु भी AB रेखा पर होंगे?

क्या (4,– 4) बिन्दु भी रेखा पर होगा या नहीं?

AD रेखा पर कोई और बिन्दु लो और बताओ कि क्या यह क्रमित युग्म समीकरण को संतुष्ट करते हैं या नहीं?

कोई एक बिन्दु लीजिए जो AD पर नहीं हैं। (1, 1) क्या यह समीकरण को संतुष्ट करता?

क्या आप कोई बिन्दु जो AD पर नहीं है उसे मालूम कर सकते जो समीकरण को संतुष्ट करता हो।

निम्नलिखित निरिक्षणों को देखो :

1. सभी रेखीय समीकरणों के हल रेखा पर स्थित होते हैं।
2. रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु उस रैखिक समीकरण का हल होता है।
3. जो बिन्दु रेखा पर स्थित नहीं होता वह उस समीकरण का हल नहीं होता है।
4. बिन्दुओं का समूह जो रैखिक समीकरण का हल होता है। उसी से आलेख बनता है।

हमने देखा कि दो चरराशि वाले रैखिक समीकरणों का आलेखीय प्रदर्शन एक सरल रेखा होता है। अतः $ax + by + c = 0$(जहाँ a तथा b दोनों एक साथ शून्य नहीं होते हैं।) उसे दो चरराशि वाला रैखिक समीकरण कहते हैं।

6.4.1 रैखिक समीकरण के आलेख

चरण :

1. रेखीय समीकरण को लिखो।
2. $x = 0$ समीकरण में लिखिए और संलग्न y का मूल्य ज्ञात करो।
3. $y = 0$ समीकरण में लिखिए और संलग्न 'x' का मूल्य ज्ञात करो।
4. चरण 2 और 3 में x और y के निर्देशांक को (x, y) के रूप में लिखेंगे ।
5. इन बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर अंकित कीजिए ।
6. इन बिन्दुओं को मिलाइए ।

अतः खिंची गयी रेखा दो चर राशि वाले रैखिक समीकरण का आलेख होगा। रेखा की जाँच के लिए कुछ और बिन्दुओं को प्रतिस्थापित कीजिए। अधिक साधन समुच्चयों के लिए 'x' के अलग-अलग मूल्यों को लगाकर उससे संबंधित 'y' का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्रयत्न कीजिए

एक ग्रॉफ पेपर लो, (2, 4) बिन्दु को निरूपित करो, उसमें से गुज़रने वाली रेखा खींचो। अब इन प्रश्नों के उत्तर दो।

1. क्या एक और रेखा (2, 4) बिन्दू में गुज़रने वाली खींच सकते है?
2. इस प्रकार के और कितनी रेखाएँ खींच सकते है?
3. (2, 4) क्रमित युग्म के दो चर राशियों के कितने रेखीय समीकरण होंगे।

उदाहरण-10. $y - 2x = 4$ समीकरण का आलेख खींचो और निम्न प्रश्नों के उत्तर दो।

(i) क्या (2, 8) बिन्दु रेखा पर होगा? (2, 8) समीकरण का हल है? (2, 8) बिन्दु समीकरण में लगाकर देखिए।

(ii) क्या (4, 2) बिन्दु रेखा पर होगा? क्या (4, 2) समीकरण का हल है क्या? बीजगणितीय विधि से हल करो।

(iii) आलेख द्वारा और तीन साधन समुच्चय ज्ञात कीजिए?

हल : $y - 2x = 4 \Rightarrow y = 2x + 4$ दिया गया।

तालिका द्वारा हल

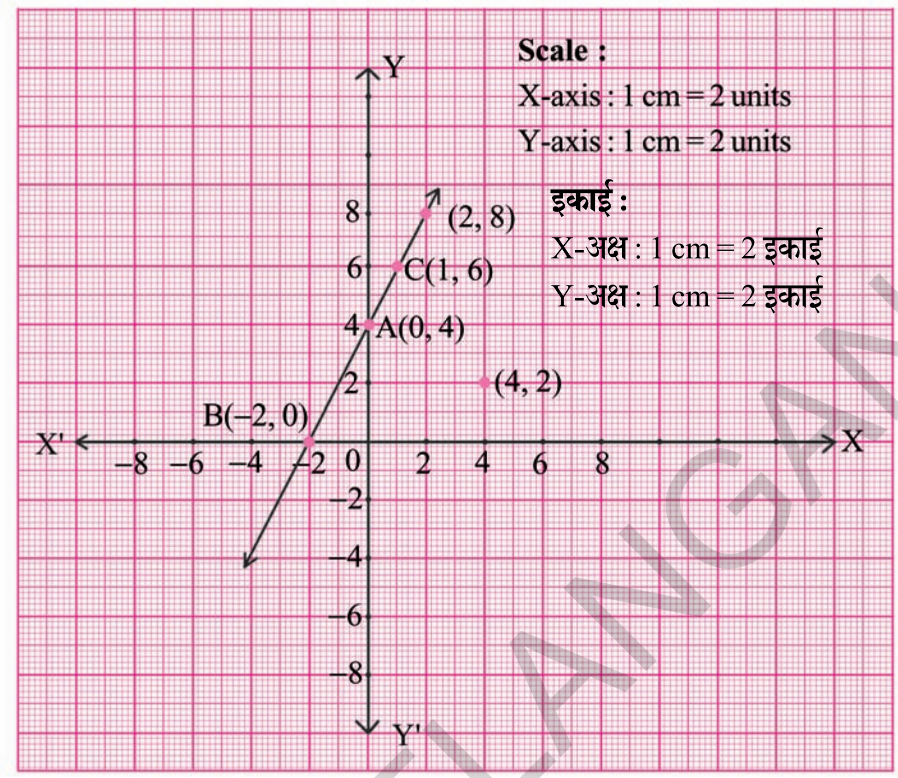
x	y = 2x + 4	(x, y)	बिन्दु
0	$y = 2(0) + 4 = 4$	(0, 4)	A(0, 4)
2	$y = 2(-2)+4 = 0$	(–2, 0)	B(–2, 0)
1	$y = 2(1) + 4 = 6$	(1, 6)	C(1, 6)

A, B और C बिन्दुओं को आलेख में निरूपित करो उन्हें मिलाओ BC आलेख में दर्शाए अनुसार यह रेखा दिए गए समीकरण $y - 2x = 4$ का हल है।

(i) (2, 8) बिन्दु को आलेख पर निरूपित करो। आलेख से यह निरूपित होता है कि (2, 8) बिन्दु रेखा पर स्थित होगा।

बीजगणितिय हल द्वारा (2, 8) बिन्दु समीकरण में लगाने पर,

$$LHS = y - 2x = 8 - 2x2 = 8 - 4 = 4 = RHS,$$ अतः (2, 8) यह हल है।



(ii) (4, 2) बिन्दु को आलेख पर निरूपित करो। हम यह देखते हैं कि (4, 2) यह रेखा पर नहीं है।

बीजगणित द्वारा हल करने पर : (4, 2) दिए गए समीकरण में लिखने पर,

LHS = y – 2x = 2 – 2×4 = 2 – 8 = – 6 $\neq$ RHS, अतः (4, 2) यह हल नहीं है।

(iii) हमें मालूम है कि रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु उस रेखा के समीकरण का हल होता है । (-4, -4), (-3,-2) तथा (-1,2) ये दिए गए बिन्दु समीकरण $y - 2x = 4$ के हल है। जब कि (1,5) (2,1) तथा (-4,1) बिन्दु समीकरण के हल नहीं हो सकते। क्योंकी ये बिन्दु रेखा पर स्थित नहीं है।

उदाहरण (i) (1, 5); ....; ....

उदाहरण-11. $x - 2y = 3$ समीकरण को आलेख द्वारा निरूपित करो।

आलेख से द्वारा (i) (x, y) का हल जहाँ $x = -5$

(ii) (x, y) का हल जहाँ $y = 0$

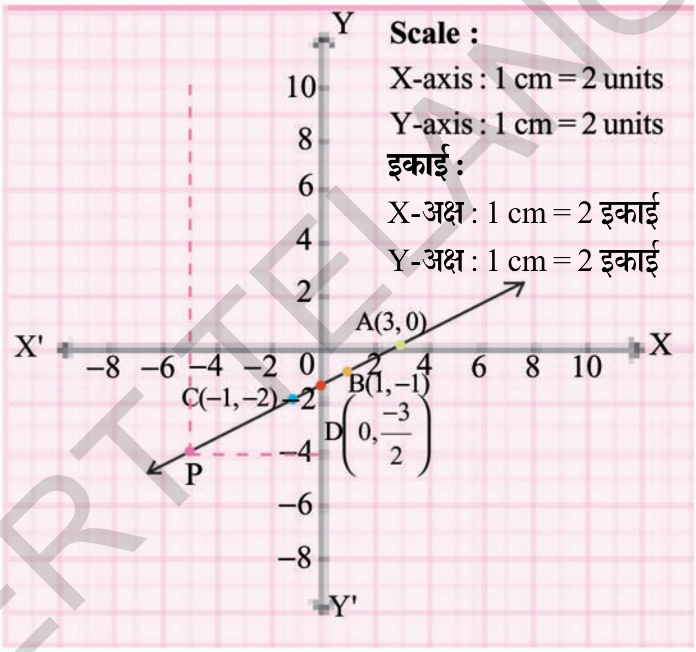
(iii) (x, y) का हल जहाँ $x = 0$

हल : $x - 2y = 3 \Rightarrow y = \dfrac{x-3}{2}$

तालिका द्वारा हल

x	$y = \frac{x-3}{2}$	(x, y)	बिन्दू
3	$y = \frac{3-3}{2} = 0$	(3, 0)	A
1	$y = \frac{1-3}{2} = -1$	(1, – 1)	B
– 1	$y = \frac{-1-3}{2} = -2$	(– 1, – 2)	C

A, B, C बिन्दुओं को आलेख पर निरूपित करो और उन्हें मिलाइए सभी बिन्दु एक सरल रेखा पर स्थित होंगे, जैसे कि चित्र में बताया गया है, $x - 2y = 3$ यह समीकरण दिए गए आलेख का हल है।



(i) हम (x, y) का हल मालूम करेंगे जहाँ $x = -5$, हमें सरल रेखा पर वह बिन्दु मालूम करना होगा जहाँ (x-coordinate) = – 5. इस प्रकार के बिन्दु मालूम करने के लिए y-अक्ष के समांतर $x = -5$ रेखा खींचना चाहिए। (आलेख में बिन्दुओं द्वारा दर्शाया गया). यह रेखा आलेख में 'P' बिन्दु पर मिलती है, जहाँ से हमें एक और समांतर रेखा खींचना है जो X-अक्ष के समांतर है और Y-अक्ष को $y = -4$ पर मिलती है।

P के क्रमित युग्म = (– 5, – 4)

P(– 5, – 4) यह सरल रेखा $x - 2y = 3$ पर स्थित होगा $x - 2y = 3$ का हल है।

(ii) (x, y) का हल मालूम करना है जहाँ $y = 0$.

$y = 0$, यह बिन्दू (x, 0) X-अक्ष पर है। अतः हमें वह बिन्दू ज्ञात करना है जो X-अक्ष पर हैं और $x - 2y = 3$ के आलेख पर है।

आलेख से यह निरूपित होता है कि (3, 0) निर्धारित बिन्दू है।

$\therefore$ (3, 0) हल है।

(iii) (x, y) का हल ज्ञात करो जब कि $x = 0$.

$x = 0$ यह बिन्दू (0, y) Y-अक्ष पर होगा। हमें वह बिन्दू मालूम करना है जो Y-अक्ष पर होगा और आलेख $x - 2y = 3$ पर होगा।

आलेख द्वारा यह स्पष्ट है कि $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ बिन्दू है।

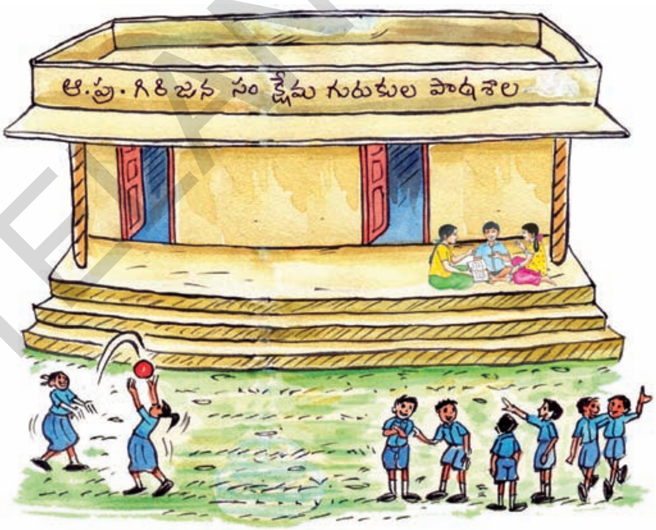
$\therefore$ हल $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ है।

उदाहरण-12. किसी विद्यालय में 25% छात्र लडकियाँ और शेष लडके हैं। एक समीकरण द्वारा आलेख का निरूपण करो। आलेख को देखते हुए निम्न प्रश्नों के उत्तर दो।

(i) यदि लडकियाँ 25 हो तो लडकों की संख्या ज्ञात करो।

(ii) यदि लडके 45 हो तो लडकियों की संख्या मालूम करो।

(iii) लडकों के लिए तीन अलग-अलग मूल्य लो और लडकियों की संख्या मालूम करो। उसी संख्या प्रकार 3 तीन अलग-अलग संख्याएँ लडकियों के लिए लेकर लडकों की संख्या ज्ञात करो।



हल : मानलो लड़कियों की संख्या 'x' और लडकों की संख्या 'y'

कुल छात्रों की संख्या $= x + y$

दिए गए सूचना के अनुसार

लडकियों की संख्या छात्रों की संख्या का 25% है।

x का (x + y) का 25%

$= (x + y)$ का $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}(x + y)$

$$x = \frac{1}{4}(x+y)$$

$$4x = x + y$$

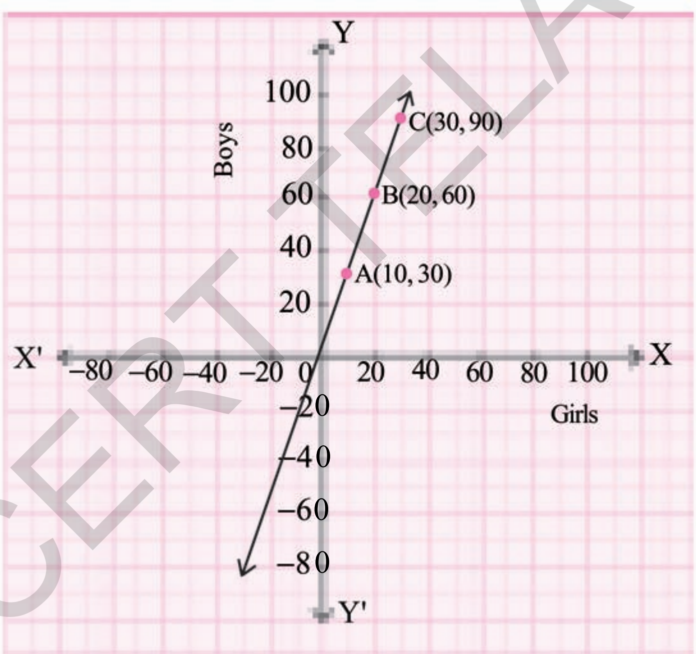
$$3x = y$$

$3x = y$ या $3x - y = 0$ यह अपेक्षित समीकरण है।

तालिका द्वारा हल

x	y = 3x	(x, y)	बिन्दु
10	30	(10, 30)	A
20	60	(20, 60)	B
30	90	(30, 90)	C

A, B और C बिन्दु को आलेख पर निरूपित करो और उन्हें मिलाओ (जोड़ो) हमें एक सरल रेखा प्राप्त होगी जो इस प्रकार है।



इकाई :
X-अक्ष : 1 cm = 20 इकाई
Y-अक्ष : 1 cm = 20 इकाई

आलेख से हमें यह देखते हैं कि,

(i) यदि लड़कियों की संख्या 25 है तो लड़कों की संख्या 75.

(ii) यदि लड़कों की संख्या 45 है तो लड़कियों की संख्या 15.

(iii) लड़कियों के लिए कोई संख्या चुन लो और लड़कों की संख्या ज्ञात करो।
उसी प्रकार लड़कों की संख्या के लिए कोई संख्या चुन लो और लड़कीयों की संख्या मालूम करो। यहाँ हम सरल रेखा और आलेख को देखते हैं। वह रेखा जो मूल बिन्दु से गुजरती है और वह $y = mx$ रेखा के रूप में है जहाँ m वास्तविक संख्या है जो मूल बिन्दु से गुजरती है।

उदाहरण-13. नीचे दिए गए प्रत्येक आलेख के, चार समीकरण दिए गए है। इनमें से कौनसे समीकरण दिए गए आलेख का निरूपण करते है?

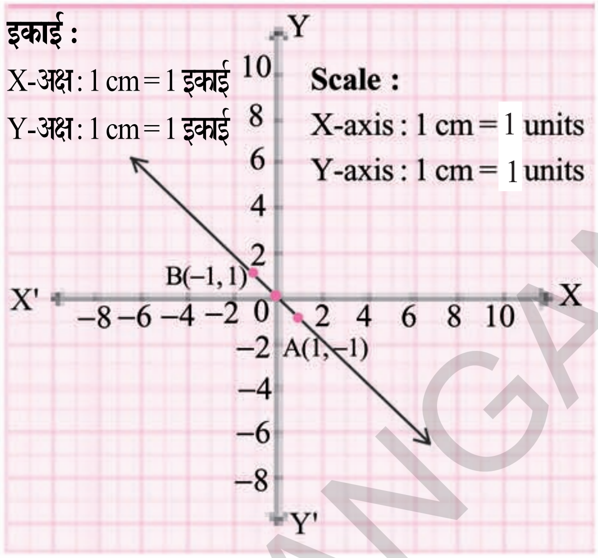
(i) समीकरण इस प्रकार है।

A) $y = x$

B) $x + y = 0$

C) $y = 2x$

D) $2 + 3y = 7x$



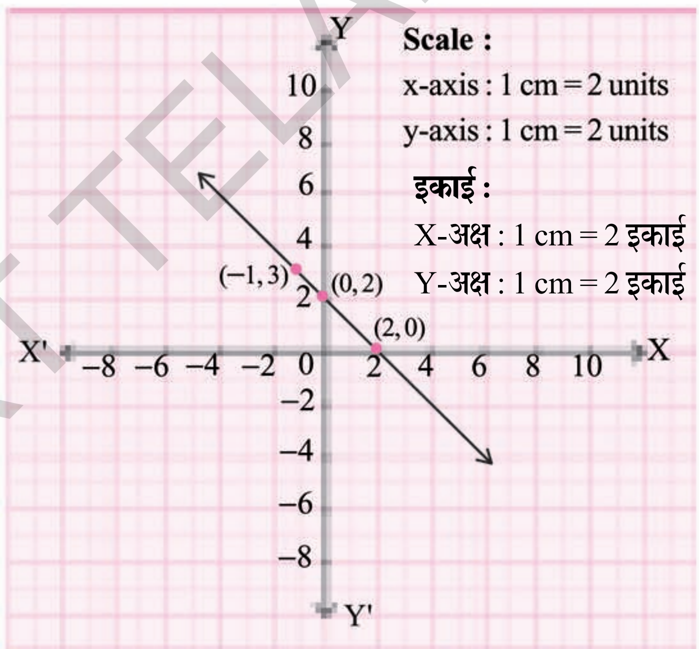
(ii) समीकरण

A) $y = x + 2$

B) $y = x - 2$

C) $y = -x + 2$

D) $x + 2y = 6$



हल :

(i) आलेख द्वारा हम देख सकते हैं कि $(1, -1)$ $(0, 0)$ $(-1, 1)$ एक ही रेखा पर होंगे।आपेक्षित समीकरण के हल निम्न बिन्दु है। यदि हम निम्न बिन्दुओं को आपेक्षित समीकरण में लगाने पर संतुष्ट होगा। हमें एक समीकरण मालूम करना है जो इन जोडियों को संतुष्ट करता हो। यदि हम $(1, -1)$ बिन्दु पहले समीकरण $y = x$ में लगाने पर संतुष्ट नहीं होगा। अतः $y = x$ यह आपेक्षित समीकरण नहीं है। $(1, -1)$ बिन्दु $x + y = 0$ म लगाने पर, यह समीकरण को संतुष्ट करता है। इस तरह सभी तीन बिन्दु दुसरे समीकरण को संतुष्ट करते है। अतः $x + y = 0$ आपेक्षित समीकरण है।

जाँच करेंगे कि क्या अब हम $y = 2x$ और $2 + 3y = 7x$ को $(1, -1)$ $(0, 0)$ और $(-1, 1)$ संतुष्ट करते है। हम देखते हैं कि एक भी जोड़ी संतुष्ट नहीं करती तीनों बिन्दुओं को छोड़ दो। अतः यह समीकरण को संतुष्ट नहीं करते है।

(ii) रेखा पर स्थित बिन्दु $(2, 0)$, $(0, 2)$ और $(-1, 3)$. है। सभी बिन्दु पहले और दुसरे समीकरण को संतुष्ट नहीं करते। मानलो तीसरा समीकरण $y = -x + 2$ लो। ऊपर दिए गए तीन बिन्दु समीकरण में लिखने पर समीकरण संतुष्ट होगा। अतः आपेक्षित समीकरण $y = -x + 2$ होगा। बताओ कि $x + 2y = 6$ समीकरण को दिए गए बिन्दु संतुष्ट करते क्या?

अभ्यास - 6.3

1. प्रत्येक रेखीय समीकरण को आलेख द्वारा दर्शाओ।

   i) $2y = -x + 1$ ii) $-x + y = 6$ iii) $3x + 5y = 15$ iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$

2. प्रत्येक रेखीय समीकरण को आलेख द्वारा दर्शाओ और निम्न प्रश्नों के उत्तर दो।

   i) $y = x$ ii) $y = 2x$ iii) $y = -2x$ iv) $y = 3x$ v) $y = -3x$

   i) क्या सभी समीकरण $y = mx$ के रूप में है? m वास्तविक संख्या है?

   ii) क्या सभी आलेख मूल बिन्दु से गुजरती है क्या?

   iii) इन आलेखों से आप क्या समझते हो?

3. $2x + 3y = 11$ समीकरण के आलेख खींचो। जब $x = 1$ हो तो आलेख की सहायता से y ज्ञात करो।

4. $y - x = 2$ समीकरण का आलेख खींचो। आलेख द्वारा ज्ञात कीजिए।

   i) y का मूल्य ज्ञात करो जब कि $x = 4$

   ii) x का मूल्य ज्ञात करो जब कि $y = -3$

5. $2x+3y=12$ समीकरण का आलेख खींचो। आलेख से हल ज्ञात करो।

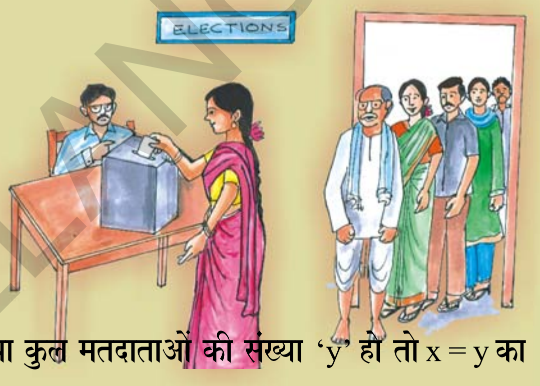
   i) y-का निर्देशांक 3

   ii) x-का निर्देशांक -3

6. नीचे दिए गए प्रत्येक समीकरणों के आलेख खींचो और निर्देशांक अक्षों को काटने वाले बिन्दूओं को ज्ञात कीजिए ।

   i) $6x - 3y = 12$ ii) $-x + 4y = 8$ iii) $3x + 2y + 6 = 0$

7. रजिया और प्रीति, नवीं कक्षा के दो छात्रों ने प्राकृतिक आपदाओं से ग्रसित लोगों के लिए कुल 1000 रु. प्रधानमंत्री सहायता कोष में जमा करवाए रैखिक समीकरण लिख कर कथन को आलेख द्वारा समझाओ।
8. गोपय्या ने धान तथा गेहूँ के बीजों को दो खेतों में बोया जिसका कुल क्षेत्रफले 5000 वर्ग मी है। इसका रैखिक समीकरण लिख कर आलेख द्वारा समझाओ।
9. 6 कि.ग्रा द्रव्यमान बाले पिण्ड पर लगाया गया बल उसमें उत्पन्न त्वरण के समानुपाती होता है। इस कथन का समीकरण आलेख द्वारा समझाइए।
10. एक चट्टान से एक पत्थर गिरता है, पत्थर का वेग V = 9.8t. दिया गया है आलेख उतार कर '4' सेकेण्ड बाद उसका वेग क्या होगा बताइए।
11. एक चुनाव केन्द्र में 60% लोगों ने वोट डाले। इसका समीकरण बनाकर आलेक उतरिए और आलेख द्वारा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



(i) यदि 1200 लोगों ने वोट डालें हो तो कुल मतदाताओं की संख्या ज्ञात कीजिए।
(ii) यदि कुल मतदाताओं की संख्या 800 हो तो वोट डालने वालों की संख्या ज्ञात कीजिए।
[**सूचनाः** यदि वोट डालने वालों की संख्या 'x' तथा कुल मतदाताओं की संख्या 'y' हो तो x = y का 60%]
12. जब पिता 25 वर्ष के थे। तब रूपा का जन्म हुआ। इस कथन का समीकरण लिखकर आलेख खींचो और आलेख से निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
(i) जब रूपा 25 वर्ष की होगी तब पिता की आयु क्या होगी?
(ii) जब पिता की आयु 40 वर्ष होगी तब रूपा की आयु क्या होगी?
13. एक आटो 15 रु. प्रति किलोमीटर पहले एक किलोमीटर के लिए, और आगे प्रति किलोमीटर को 8 रु. से चार्ज करता। 'x' km. दूरी को 'y' रुपये दिए गए हो तो।
रेखीय समीकरण लिख कर आलेख द्वारा दर्शाओ आलेख की सहायता से बताओ कि यदि 55 रु. आटो को दिए गए तो दूरी कितनी होगी? तथा 7 कि.मी. के लिए कितने रुपये देने होंगे?
14. एक पुस्तकालय में पहले तीन दिन के लिए और उसके आगे के दिन के लिए कुछ रकम निर्धारित कि गई है। जॉन ने सात दिन पुस्तकअपने पास रखी और 27 रुपये दिये। यदि निर्धारित रकम x रु. और अगले प्रत्येक दिन का हिसाब y रु. हो तो रेखीय समीकरण लिख कर आलेख द्वारा दर्शाओ। आलेख की सहायता से प्रति दिन की रकम क्या होगी? यदि प्रति दिन 4/- रु. का किराया निर्धारित हो तो उसका स्थिर मूल्य क्या होगा? जब कि रकम 7 रु हो?

15. रेल्वे स्टेशन में पहले दो घंटे के लिए कार पार्किंग के लिए 50 रु. और आगे प्रति घंटे के लिए 10 रु. निर्धारित किया गया हो तो निम्न समीकरण लिख कर आलेख द्वारा दर्शाओ। आलेख द्वारा निम्न लिखित समय के लिए मूल्य ज्ञात कीजिए।

(i) 3 घंटे के लिए (ii) 6 घंटे के लिए

(iii) कितने घंटे के लिए रेखा ने कार पार्किंग को 80 रु दिए।

16. समीरा एक कार सम वेग 60 कि.मी. प्र.घ. से चला रही है तो दूरी - समय को आलेख पर खींचिए समीरा द्वारा तय की गई दूरी को ज्ञात कीजिए।

(i) $1\frac{1}{2}$ घंटे (ii) 2 घंटे (iii) $3\frac{1}{2}$ घंटे

17. हैड्रोजन और आक्सीजन का परिमाण पानी में 1:8 है तो हैड्रोजन और आक्सीजन का समीकरण लिख कर आलेख द्वारा दर्शाओ। आलेख से 12 ग्रा आक्सीजन के लिए हाइड्रोजन का परिमाण और $\frac{3}{2}$ ग्रा हैड्रोजन के लिए आक्सीजन का परिमाण ज्ञात कीजिए।

[**सूचनाः** हाइड्रोजन तथा आक्सीजन के परिमाणों को क्रमशः 'x' तथा 'y' लिजिए तब $x : y = 1:8 \Rightarrow 8x = y$]

18. 28 लिटर मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 5:2 है। मिश्रण और दूध का समीकरण लिख कर आलेख खींचो। आलेख को देखते हुए मिश्रण में दूध का परिमाण मालूम करो।

[**Hint:** मिश्रण और दूध का अनुपात $= 5 + 2 : 5 = 7 : 5$]

19. USA और केनडा इन देशों में तापमान फैरनहाइट में मापते हैं जब कि भारत में सेलसियस से मापते हैं। यहाँ रेखीय समीकरण को फैरनहाइट से सेलसियस $F = \left(\frac{9}{5}\right) C + 32$ में बदलने पर।

(i) x-अक्ष पर सेलसियस और Y-अक्ष पर फारनहैट से रेखीय समीकरण का आलेख उतारो।

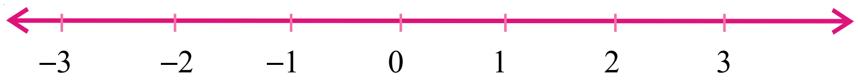
(ii) यदि तापमान 30°C हो तो फारनहैइट में तापमान क्या होगा?

(iii) यदि तापमान 95°F हो तो सेंटीग्रेड के तापमान क्या होगा?

(iv) क्या कोई अंकिय तापमान दोनों फारनहाइट और सेलसियस में समान होंगे? यदि हाँ तो ज्ञात कीजिए?

6.5 X-अक्ष और Y-अक्ष के समानांतर रेखाओं के समीकरण

अब समीकरण $x = 3$ लीजिए। यदि इसे हम केवल एक चर राशि वाला समीकरण मानलें, तो इसका एक अद्वितीय हल $x = 3$ होता है, जो संख्या रेखा पर स्थित एक बिन्दु है।



यदि इसे दो चरराशि वाला समीकरण मान लेने पर इसे $x + 0.y - 3 = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

इसके अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे है। इसमें कुछ और उदाहरण मालूम करेंगे। यहाँ y का गुणांक शून्य है। इसी प्रकार सभी y के मूल्यों के लिए, $x = 3$.

तालिका का हल

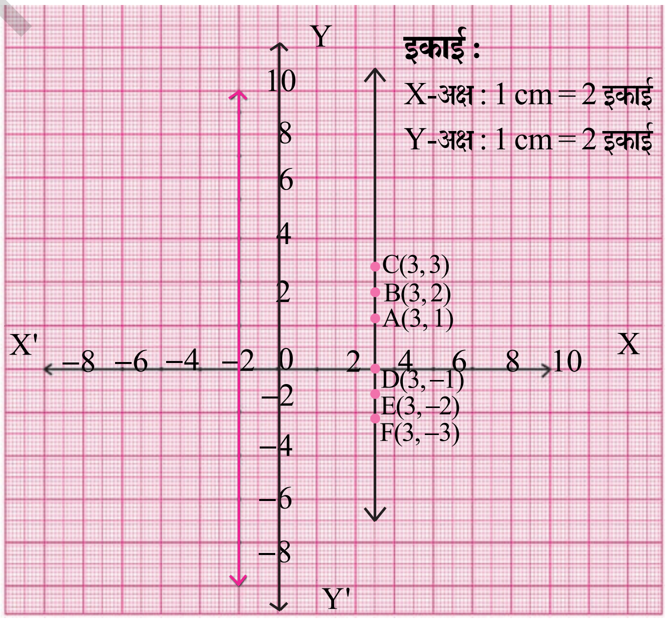
x	3	3	3	3	3	3	......
y	1	2	3	–1	–2	–3	.....
(x, y)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, –1)	(3, –2)	(3, –3)	.....
Points	A	B	C	D	E	F	.....

इस तालिका से यह मालूम होता है कि समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। जैसे (3, a) जहाँ a वास्तविक संख्या है।

अब आलेख द्वारा हल कीजिए आप आलेख द्वारा क्या समझेंगे?

क्या यह सरल रेखा है? क्या यह रेखा है या कोई अक्ष है? यह रेखा सरल रेखा है जो Y-अक्ष के समानांतर है?

y-अक्ष से कितनी दूरी पर है?



इस प्रकार $x = 3$ का आलेख, y-अक्ष के समानांतर और 3 इकाई दूरी पर है।

प्रयत्न कीजिए

1.i) निम्न लिखित समीकरणों को आलेख द्वारा निरूपित करो :-

a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -4$

ii) क्या सभी समीकरणों के आलेख Y-अक्ष के समानांतर है?

iii) प्रत्येक स्थिति में आलेख और Y-अक्ष के बीच की दूरी ज्ञात करो।

2.i) निम्न समीकरणों को आलेख द्वारा दर्शाओ।

a) $y = 2$ b) $y = -2$ c) $y = 3$ d) $y = -3$

ii) क्या ये सभी X-अक्ष के समानान्तर है।

iii) प्रत्येक स्थिति में रेखा तथा X-अक्ष के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त निरिक्षणों से यह निष्कर्ष निकलता है:

1. $x = k$ का आलेख Y-अक्ष के समानान्तर रेखा होगी जो k इकाई दूरी पर होगी तथा बिन्दु $(k, 0)$ से गुजरती है।
2. $y = k$ का आलेख X-अक्ष के समानान्तर रेखा होगी जो k इकाई दूरी पर होगी तथा बिन्दु $(0, k)$ से गुजरती है।

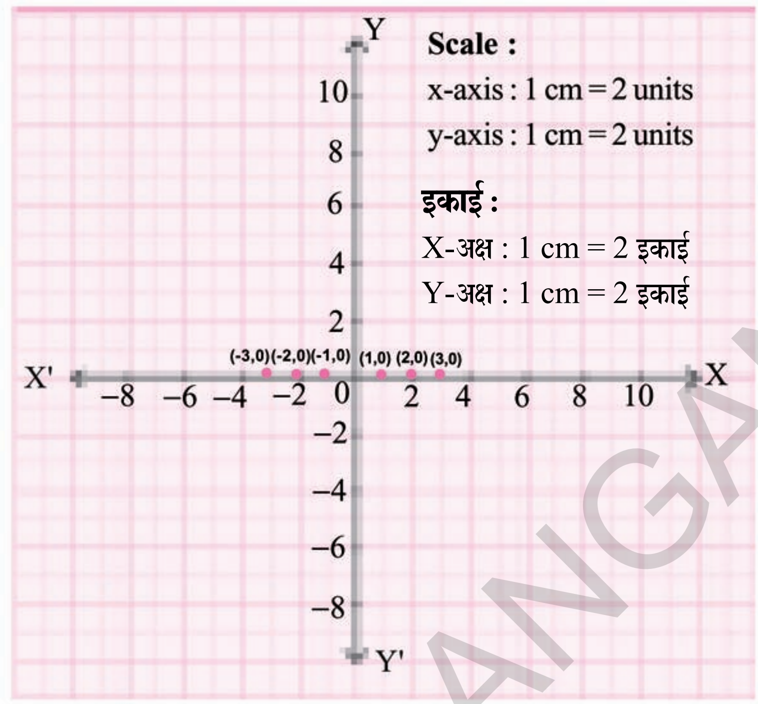
6.5.1 X तथा Y अक्ष के समीकरण:

समीकरण $y = 0$ को देखिए। उसे $x + 0 = 0$। अब हम इसका आलेख खींचेंगे।

हल की तालिका

x	1	2	3	–1	–2	……
y	0	0	0	0	0	…..
(x, y)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(–1, 0)	(–2, 0)	…..
Points	A	B	C	D	E	…..

इन सभी बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर डालकर उसका चित्र बनाइए इस आलेख में आपने क्या देखा?



हम यह देखते हैं कि सभी बिन्दु X-अक्ष पर है और y-निर्देशांक (coordinate) के सभी बिन्दु '0' पर है।

इसिलिए समीकरण $y = 0$, X-अक्ष पर है। दुसरे शब्दों में X-अक्ष का समीकरण $y = 0$ होता है।

प्रयत्न कीजिए

y-अक्ष का समीकरण ज्ञात करो।

अभ्यास - 6.4

1. निम्न समीकरणों को आलेख द्वारा दर्शाओ :
   a) संख्या रेखा पर और b) कार्तीय तल पर
   i) $x = 3$ ii) $y + 3 = 0$ iii) $y = 4$ iv) $2x - 9 = 0$
   v) $3x + 5 = 0$
2. $2x - 11 = 0$ समीकरण को आलेख द्वारा हल करो।
   i) एक चर राशि से ii) दो चर राशियों से

3. समीकरण $3x + 2 = 8x - 8$ को हल करो और हल को

   i) संख्या रेखा पर ii) कार्तीय तल पर (Cartesian plane)

4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो X-अक्ष के समानान्तर है और इन बिन्दुओं से गुजरता है।

   i) (0, –3) ii) (0, 4) iii) (2, –5) iv) (3, 4)

5. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो Y-अक्ष के समानान्तर है और इन बिन्दु से गुजरता है।

   i) (–4, 0) ii) (2, 0) iii) (3, 5) iv) (–4, –3)

6. ऐसी तीन रेखाओं का समीकरण लिखो जो

   (i) X-अक्ष के समानांतर (ii) Y-अक्ष के समानान्तर

हमने क्या सीखा?

1. यदि रेखीय समीकरण में दो चर राशिया हो तो उसे दो चर राशियों का रेखीय समीकरण कहते हैं।
2. यदि कोई दो क्रमित युग्म 'x' और 'y' दो चर राशियों के रेखीय समीकरण को संतुष्ट करते हैं तो उसे हल (solution) कहते हैं।
3. दो चरराशि वाले रैखिक समीकरण के अनेक साधन समुच्चय होते है।
4. दो चर राशियों के रैखिक समीकरण का ग्राफ एक सरल रेखा होती है।
5. $y = mx$ का आलेख एक सरल रेखा होगी जो मूल बिन्दु से होकर गुजरती है।
6. $x = k$ का आलेख, Y-अक्ष के समानान्तर है k इकाई की दूरी पर और (k, 0) बिन्दू से गुजरता है।
7. $y = k$ का आलेख, X-अक्ष के समानांतर है जो k इकाई के दूरी पर है और (0, k) बिन्दू से गुजरती है।
8. X-अक्ष का समीकरण $y = 0$ है।
9. Y-अक्ष का समीकरण $x = 0$ है।

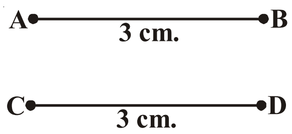
07

त्रिभुज
(TRIANGLES)

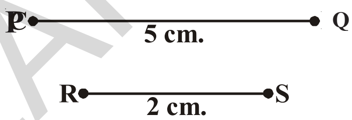
7.1 परिचय :

हमने रेखाओं और काणों के चित्र उतारकर उनके गुणों का अध्ययन किया है। क्या आपको दी गई लम्बाई का रेखाखण्ड खींचना याद है? सभी रेखाखण्ड समान लम्बाई के नहीं होते, वे भिन्न लम्बाई के भी होंगे। हम वृत्त भी खींचते हैं। वृत्त खींचने के लिये हमें कौनसे मापों की आवश्यकता है?वह वृत्त की त्रिज्या होती है। हम दिये गये मापों से कोण भी बनाते हैं।

हम जानने है कि यदि दो रेखाओं की लम्बाई समान हो तो वे सर्वसमान होते हैं।

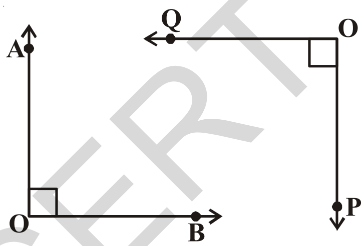


$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
(सर्वसमान)

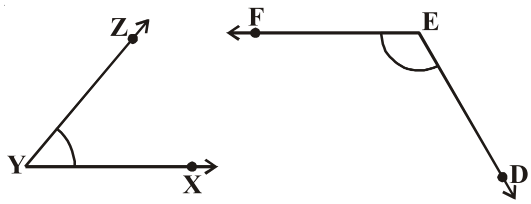


$\overline{PQ} \ncong \overline{RS}$
(अ-सर्वसमान)

दो कोण सर्वसमान है यदि उनका परिमाण समान हो ।



$\angle AOB \cong \angle POQ$
(सर्वसमान)



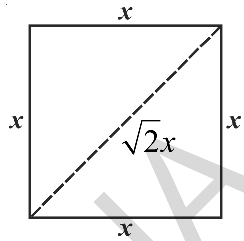
$\angle XYZ \ncong \angle DEF$
(अ-सर्वसमान)

ऊपर्युक्त उदाहरणों से हम ये कह सकते है कि आकृतियाँ समान परिमाण की है या नहीं बताने के लिये हमें कुछ विशिष्ट आकृतियों के मापों की सूचना ज्ञात होना आवश्यक है।

एक वर्ग पर विचार करेंगे : वह न्यूनतम आवश्यक सूचना क्या है? जो यह बताती है कि दो वर्ग समान है या नहीं।

सत्या ने कहाः '' मुझे सिर्फ दिये गये वर्गो की भुजा का माप चाहिए। यदि दिये गये वर्गों की भुजाये समान हो तो दानों वर्ग परिमाण में समान हांगे।''

सिरी ने कहा ''वह सच है लेकिन यदि दो वर्गों के कर्ण भी यदि समान हो तो हम कह सकते है कि दोनो वर्ग समान होते है ।



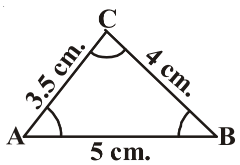
क्या आप बता सकते है कि दानों सही है ?

वर्ग के गुणों को याद कीजिये।आप दो समान मापो के विभिन्न वर्ग नहीं बना सकते है। क्या आप ऐसा कर सकते हो? और दो वर्गों के कर्ण तब समान होगे जब उनकी भुजायें समान हो। दिये गये चित्र को देखियेः

वे आकृतियाँ जो समान आकार और परिमाण के हो वे सर्वसमान आकृतियाँ कहलाती हैं। (सर्वसमान का अर्थ है सभी विषयों में समान) अतः वे वर्ग जिनकी भुजायें समान वे हैं सर्वसमान कहलाते है और समान कर्णों के वर्ग भी सर्वसमान होते है।

नोटः समान्यतः भुजायें परिमाण का निर्णय और कोण आकृति का निर्णय करते है ।

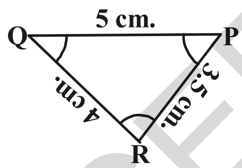
हम जानते है कि यदि दो वर्ग सर्वसमान है और हम उनमे से एक का ट्रेस कर दूसरे पर रखें तो वह पहले वाले को पूर्ण रूप से ढक देगा।



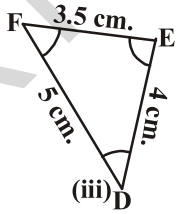
(i)

अब त्रिभुज की सर्वसमानता के विषय में विचार करेंगे । हम जानते है कि यदि दो त्रिभुज सर्वसमान हैं तो एक त्रिभुज की भुजायें और कोण, दूसरे त्रिभुज की संगत भुजायें और कोण के समान होंगे।

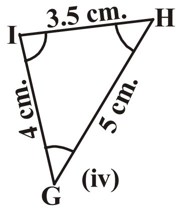
निम्न चित्रों में से कौनसे त्रिभुज, त्रिभुज ABC के सर्वसमान हैं ?



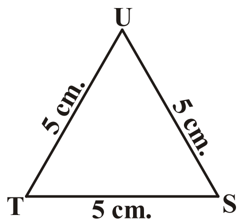
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

यदि हम आकृति (ii) से (v) तक त्रिभुजों ट्रेस कर ΔABC के ऊपर रखेंगे तो हम देखेंगे कि चित्र (ii), (iii) और (iv) ΔABC के सर्वसमान है जब कि चित्र (v) ΔTSU ΔABC के सर्वसमान नहीं है।

यदि ΔPQR, ΔABC के सर्वसमान है तो हम $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ लिखते हैं ध्यान दीजिये कि जब

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ हो, तो, ΔPQR की भुजायें ΔABC की संगत भुजाओं के समान होगी और ऐसा ही कोणों के लिये भी अर्थात, भुजा PQ भुजा AB को ढकती है, भुजा QR भुजा BC को ढकती है और भुजा RP भुजा CA को ढकती है, कोण P कोण A, को कोण Q कोण B और को कोण R कोणC को ढकता है। साथ ही, दोनों त्रिभुजों के शीर्षों में एक-एक अनुरूपता पायी जाती है। अर्थात् शीर्ष P शीर्ष A के संगत है, शीर्ष Q शीर्ष B मे संगत और शीर्ष R शीर्ष C के संगत होते है इसे निम्न रुप, में लिखा जाता हैः

$P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$

ध्यान दीजिये कि इस संगतता के अंतर्गत, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$; है। $\Delta QRP \cong \Delta ABC, Q \leftrightarrow A; R \leftrightarrow B; P \leftrightarrow C$ परन्तु इसे $QR = AB, RP = BC$ और $QP = AC$ लिखना गलत होगा ।

इसी प्रकार, आकृति (iii) के लिये,

$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC$ और $EF \leftrightarrow CA$

और $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ और $E \leftrightarrow C$

इसलिए, $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ लिखना सही है, परन्तु $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ लिखना गलत होगा।

आकृति (iv) के त्रिभुज और ΔABC के बीच संगत लिखिये अतः त्रिभुजों की सर्वसमानता को सांकेतिक रूप में लिखने के लिये, उनके शीर्षो की संगतता को सही प्रकार से लिखना आवश्यकता है। ध्यान दीजिये कि ''सर्वसमान त्रिभुजों के संगत भाग'' समान होते हैं और हम इसे संक्षिप्त में 'CPCT' लिखते हैं (*corresponding parts of congruent triangles.*) (उसी प्रकार ΔABC की सर्वसमानता को चित्र (iv) के साथ लिखने का प्रयत्न किजिए।)

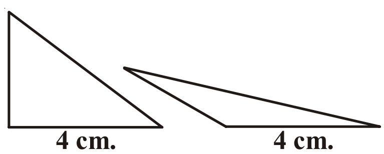
प्रयत्न कीजिये :

1. नीचे कुछ कथन दिये गये हैं। 'सत्य' या 'असत्य' है लिखिये ।
   - i. दो वृत्त हमेशा सर्वसमान होते हैं। ( )
   - ii. समान लम्बाई की दो रेखायें सदैव सर्वसमान होती हैं। ( )
   - iii. दो समकोण त्रिभुज कभी-कभी सर्वसमान होते हैं। ( )
   - iv. दो समबाहु त्रिभुज उनकी समान भुजाओं के साथ सदैव सर्वसमान होते हैं। ( )
2. दिये गये आकृतियाँ सर्वसमान है या नहीं देखने के लिये आपको कौनसे मापों की आवश्यकता होगी।?
   - i. दो आयत
   - ii. दो समचतुभुर्ज

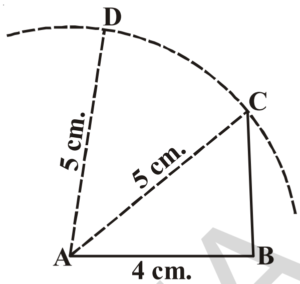
7.2 त्रिभुजों की अनुरूपता के नियम

पिछली कक्षाओं में आपने त्रिभुजों की सर्वसमानता के लिए चार कसौटियाँ (नियम) पढ चुके हैं। एक अद्वितीय (unique) त्रिभुज बनाने के लिये क्या सभी तीनों भुजाये और तीनों कोण ज्ञात होना आवश्यक है? क्या हम समान दिए गए मापों से भिन्न-भिन्न त्रिभुजों का निर्माण कर सकते है।

भुजा 4 से.मी. से दो त्रिभुज बनाइये। क्या आप 4 सेमी भुजा वाले दो भिन्न त्रिभुज बना सकते है? अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिये। क्या आपको सभी त्रिभुज सर्वसमान प्राप्त होंगे? यदि त्रिभुज की एक भुजा 4 से.मी दी गई हो तो हम विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों का निर्माण कर सकते है।

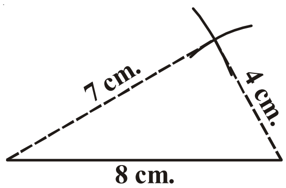


अब दो भुजायें 4 सेमी और 5 सेमी लीजिये और जितने संभव हो उतने त्रिभुज बनाइए क्या आपको सर्वसमान त्रिभुज प्राप्त होंगे?



हम दीए गए दो मापों से विभिन्न त्रिभुज बना सकते हैं ।

अब 4 सेमी, 7 सेमी और8 सेमी भुजाओं के त्रिभुज बनाइये ।

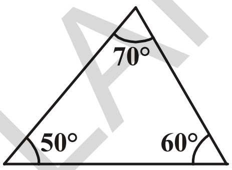


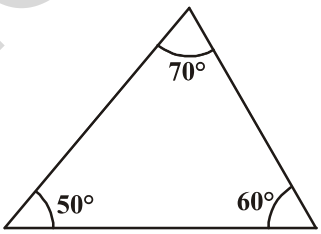
क्या आप दो भिन्न त्रिभुज बना सकोगे? आप ज्ञात करोगे कि इन तीन भुजाओं के माप से, हम एक अद्वितीय (unique) त्रिभुज बना सकते है। यदि हम इन मापों से त्रिभुज बनाने पर भी वे उसे अद्वितीय त्रिभुज के सर्वसमान होंगे ।

अब अपनी इच्छा से कोई तीन कोण लीजिये। लेकिन ध्यान रहे उनका योग 180° होना चाहिये। आप के द्वारा लिये गये मापो से दो त्रिभुज उतारिये। महिमा को पता चलेगा कि वह तीन कोणों के मापों से विभिन्न त्रिभुज बना सकती है।

$\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$

इससे यह लगता है कि तीन कोणों का ज्ञात होना विशिष्ट त्रिभुज उतारने के लिये पर्याप्त नहीं है।





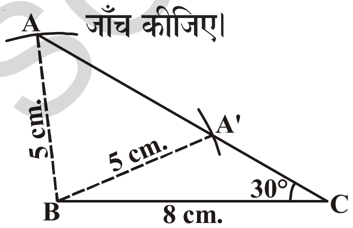
शरीफ ने सोचा कि यदि दो कोण किसी त्रिभुज के दिये गये हों तो ‘‘ त्रिभुज के तीनों कोणों के योग’’ के नियम का उपयोग करते हुये तीसरा कोण ज्ञात किया जा सकता है। इसलिये दो कोणों के मापों का ज्ञान होना एक त्रिभुज बनाने के लिये पर्याप्त है लेकिन अद्वितीय नहीं है। इसलिये दो या तीन कोण का दिया जाना पर्याप्त नहीं होगा। एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना करने के लिये कम से कम तीन विशिष्ट और स्वतंत्र दत्तों (मापों) की आवश्यकता होगी।

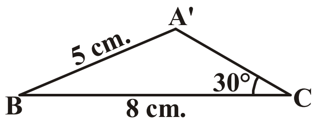
नीचे दिये गये प्रत्येक मापों के समूह से दो भिन्न त्रिभुज बनाने का प्रयत्न कीजिए।

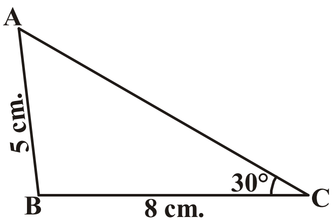
i. ΔABC जहाँ $AB = 5$ से.मी $BC = 8$ से.मी $\angle C = 30°$

ii. ΔABC जहाँ $AB = 5$ से.मी. $BC = 8$ से.मी. $\angle B = 30°$

(i) क्या आप दिये गये दत्तों से अद्वितीय त्रिभुज उतार सकते हैं? उतारकर अफने मित्रों के साथ उसकी जाँच कीजिए।

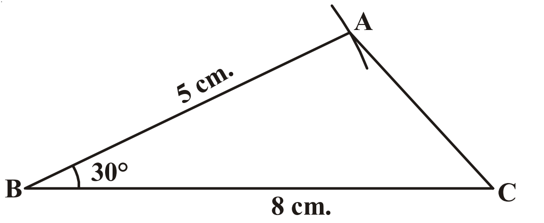






यहाँ हम दिये गये दत्तों से दो भिन्न त्रिभुज बना सकते है ΔABC और $\Delta A'BC$ आप क्या निरीक्षण करोगे? के सर्वसमान त्रिभुज है। या नहीं?

दूसरे शब्दों में आप दूसरी स्थिति (ii) के मापों से एक अद्वितीय त्रिभुज बना सकते हैं । स्थिति

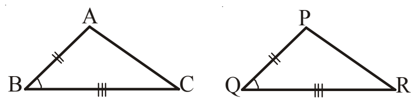


(i) और स्थिति (ii) में क्या आपने दिये गये दत्तों की ओर ध्यान दिया है? पहली स्थिति (i) में दो भुजायें और एक कोण दिया गया है जो अंतर्गत कोण नहीं है। लेकिन स्थिति (ii) मे अंतर्गत कोण दो भुजाओं के साथ दिया गया है। इसलिए दिये गये दो भुजायें और एक कोण अर्थात् तीन स्वतंत्र दत्त त्रिभुज उतारने के लिये पर्याप्त हैं। बल्की दिये गये दत्तों का क्रम भी अद्वितीय त्रिभुज उतारने के लिए एक मुख्य भूमिका निभाता है।

7.3 त्रिभुज की अनुरूपतायें (Congruency of Triangles)

उपर्युक्त धारणा त्रिभुजो की अनुरूपता को जाँच करने का एक निहितार्थ है। यदि हमारे पास एक भुजा समान वाले दो त्रिभुज, या फिर तीनों कोण समान वाले दो त्रिभुज है, तो हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि इन विशिष्ट दत्तों से त्रिभुज अनुरूप हैं, क्यों कि एक से अधिक त्रिभुज, संभव है। दो भुजायें और एक कोण समान होने पर भी हम यह नहीं कह सकते है कि त्रिभुज अनुरूप है जब कोण दी गई भुजाओं के बीच में हो तो हम कह सकते हैं कि SAS अनुरूपता सत्य है लेकिन SSA या ASS नहीं। इसे हम अनुरुपता की पहली कसौटी मानकर इसकी सहायता से दुसरी कसौटीयों को सिध्द करेंगे।

हम इसे त्रिभुज हैं कि Axiom (SAS congruence rule): भु.को.भु. अनुरूपता नियम : दो त्रिभुज अनुरूप होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजायें और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों।

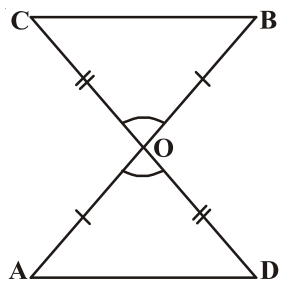


- उदाहरण के लिए ΔABC में तथा ΔPQR में

$AB=PQ$, $BC=QR$ तथा $\angle CBA=\angle RQP$, हो तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

उदाहरण -1. 1. संलग्न चित्र में $OA = OB$ और $OD = OC$ है। दर्शाइये कि

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ और (ii) $AD \parallel BC$.



हल : (i) ΔAOD और ΔBOC मे,

$OA = OB$ (दिया गया है)

$OD = OC$ (दिया गया है)

साथ ही, $\angle AOD$ और $\angle BOC$ सम्मुख कोण है,

$\angle AOD = \angle BOC$.

अतः $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (SAS अनुरूपता नियम द्वारा)

(ii) सर्व समान ΔAOD तथा ΔBOC में दुसरे संगत भाग भी समान होते है।

इसिलिए $\angle AOD = \angle BOC$. तथा रेखा खण्ड तथा के लिए में एकान्तर कोण बनाते है।

$\therefore AD \parallel BC$

उदाहरण -2. AB एक रेखाखण्ड है और रेखा l इसका समद्विभाजक है यदि P एक बिन्दु l परस्थित है तो दर्शाइए कि P बिन्दु A और B से सम-दूरी पर है ।

हल: $l \perp AB$ और AB के मध्य-बिन्दु C से होकर जाती है (चित्र देखिए)

आपको दर्शाना है कि PA = PB है। इसके लिये

ΔPCA और ΔPCB पर विचार कीजिये। हमें प्राप्त है:

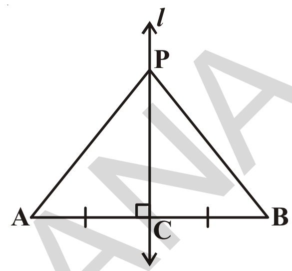
AC = BC (C, AB का मध्य-बिन्दु है)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (दिया है)

PC = PC (उभयनिष्ट)

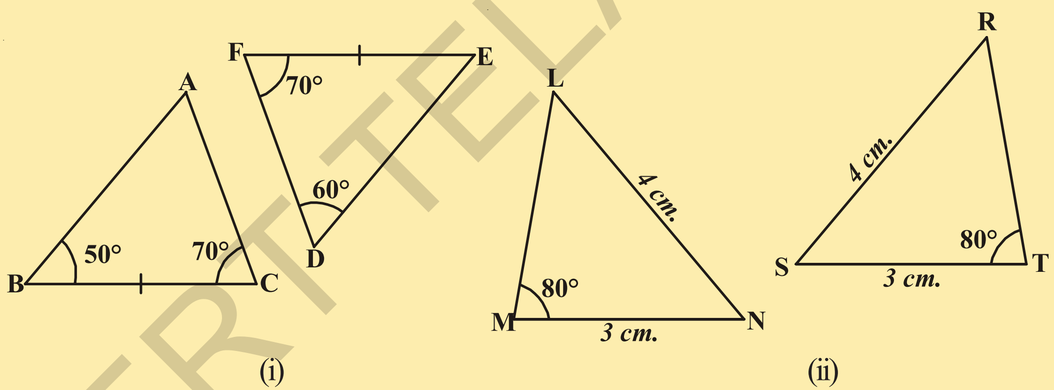
So, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS नियम)

इसलिए PA = PB (अनुरूप त्रिभुजों की संगत भुजायें)

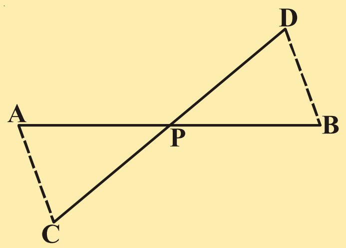


प्रयत्न कीजिये

1. बताइये कि निम्न त्रिभुज अनुरूप है या नहीं ? आपके उत्तर का कारण बताइये ।

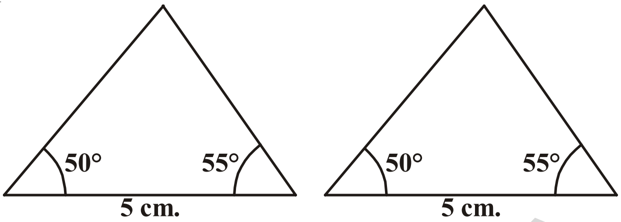


2. दिये गये चित्र में बिन्दु P, AB और DC को समद्विभाजिक करता है। सिद्ध कीजिये कि $\Delta APC \cong \Delta BPD$



7.3.1 अनुरूपता के कुछ और नियम

ऐसे दो त्रिभुजों की रचना करने का प्रयत्न कीजिये जिसमें दो कोण 50° और 55° और इन कोणों की अंतर्गत भुजा 5 से.मी. है। (चित्र देखिये) इन दो त्रिभुजों को काटिये, और एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर रखिए। आप क्या देखते है? आप देखोंगे कि दोनो त्रिभुज अनुरूप हैं। यह कोण-भुजा कोण की अनुरूपता का नियम हैं ।



और इसे ASA लिखा जाता है जैसे कि आप पिछली कक्षाओं में पढा है। अब हम इसे समझेंगे और सिद्ध भी करेंगे। क्यों कि इस परिणाम को सिद्ध किया जा सकता है, यह प्रमेय कहलाता है और इसे सिद्ध करने के लिये हम SAS अनुरूपता के स्वयंतथ्य का उपयोग करेंगे ।

प्रमेय 7.1 (ASA अनुरूपता नियम) : दो त्रिभुज अनुरूप होते है, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के समान हों ।

परिकल्पना: त्रिभुज ABC और ΔDEF

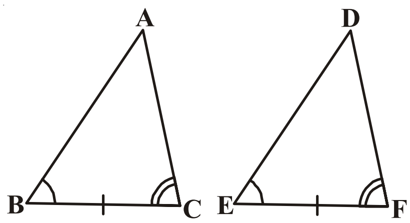
$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ and $BC = EF$

निष्कर्ष (RTP): $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उपपत्तिः यहाँ पर तीन संभावनायें हैं। AB और DE के बीच स्थित संभावनायें या तो $AB > DE$ या $DE > AB$ या $DE = AB$.

हम इन सभी स्थितियों पर विचार करेंगे और देखेंगे कि ΔABC और ΔDEF के लिये इसका क्या अर्थ निकलता है ।

स्थिति(i): मानलो $AB = DE$ (हम क्या देखेंगे?)



ΔABC और ΔDEF पर विचार कीजिये

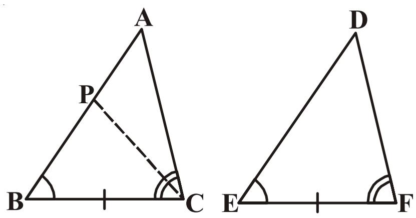
$AB = DE$ (कल्पना की गयी है)

$\angle B = \angle E$ (दिया गया है)

$BC = EF$ (दिया गया है)

इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS अनुरूपता स्वयंतथ्य)

स्थितिः (ii): दूसरी संभावना यह है कि $AB > DE$ है। इसलिए हम AB पर एक बिन्दु P ऐसा हो सकते है कि $PB = DE$ हो अब



ΔPBC और ΔDEF पर विचार कीजिये

$PB = DE$ (रचना से)

$\angle B = \angle E$ (दिया गया है)

$BC = EF$ (दिया गया है)

इसलिए, $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (SAS अनुरूपता के स्वयंतथ्य से)

क्यों कि दोनों त्रिभुज सर्वसमान है, इसलिये इनके संगत भाग समान होने चाहिये

अतः $\angle PCB = \angle DFE$

परन्तु हमें दिया गया है कि $\angle ACB = \angle DFE$

अतः $\angle ACB = \angle PCB$

परन्तु क्या यह संभव है ?

यह तभी संभव है, जब P बिन्दु का A के साथ मेल हो ।

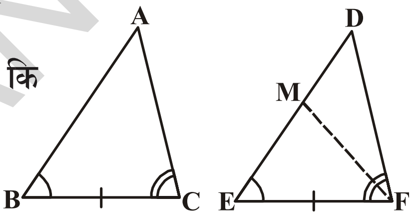
(या) $BA = ED$

अतः $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS स्वयेतथ्य द्वारा)

(**नोटः** ऊपर हमने बताया है कि यदि $\angle B = \angle E$ तथा $\angle C = \angle F$ तथा $BC = EF$ और $AB = DE$ और वे दो त्रिभुज अनुरूप हैं SAS नियम से)

स्थिति(iii): तीसरी संभावना यह है कि $AB < DE$

हम DE पर एक बिन्दु M इस प्रकार ले सकते हैं कि $ME = AB$ हो। अतः स्थिति (ii), वाले तर्क-वितर्क को दोहराते हुये, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $AB = DE$ है और इसलिये $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.है ।



अब, मानव लिजिए कि दो त्रिभुजों में दो कोणों के युग्म और संगत भुजाओं का एक युग्म समान हैं, तो यदि ये भुजाये बराबर कोणों के युग्मों की अंतर्गत भुजायें नही है, तो क्या ये त्रिभुज फिर भी अनुरूप हैं। आप निरीक्षण करेंगे कि यें त्रिभुज अनुरूप हैं। क्या आप इसका कारण बतायेंगे ?

आप जानते है कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ होता है। अतः त्रिभुजों के कोणों के दो युग्म बराबर होने पर उनका तीसरा कोण भी समान ही होंगा ($180°$ – दोनों समान कोणों का योग).

अतः दो त्रिभुज सर्वसमान होते हैं, यदि इन त्रिभुजों के दो कोणों के युग्म समान हों और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हो। हम इसे **AAS** अनुरुपता नियम कह सकते हैं। अब हम कुछ और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण-3. $AB \parallel DC$ और $AD \parallel BC$ पर विचार करो ।

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ पर विचार करो ।

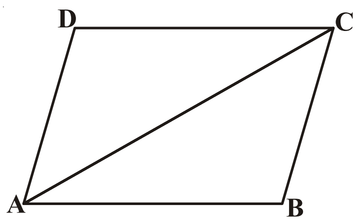
हल : ΔABC और ΔCDA पर विचार करो

$\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर अतः कोण)

$AC = CA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

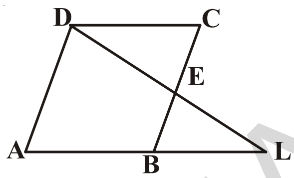
$\angle BCA = \angle DAC$ (एकांतर अतः कोण)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$(ASA अनुरूपता से)



उदाहरण-4. दिये गये आकृति में $AL \parallel DC$ और E, BC का मध्य बिन्दु हो तो बताइये कि

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$



हल : ΔEBL और ΔECD पर विचार कीजिये

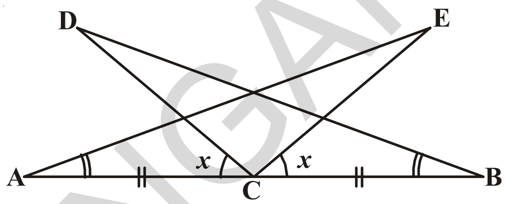
$\angle BEL = \angle CED$ (सम्मुख कोण)

$BE = CE$ (क्यों कि E, BC का मध्यबिन्दु है)

$\angle EBL = \angle ECD$ (एकांतर अतः कोण)

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$ (ASA की अनुरूपता से)

उदाहरण-5. आकृति में दी गई सूचनाओं के उपयोग से सिद्ध कीजिये



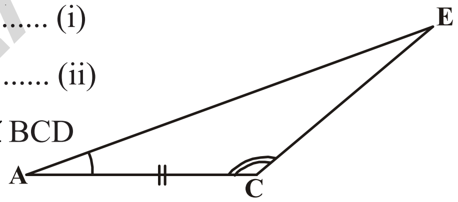
(i) $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

(ii) $DC = EC$.

हल : मानलो $\angle ACD = \angle BCE = x$

$\therefore \angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle DCE + x$ ...... (i)

$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = \angle DCE + x$ ...... (ii)

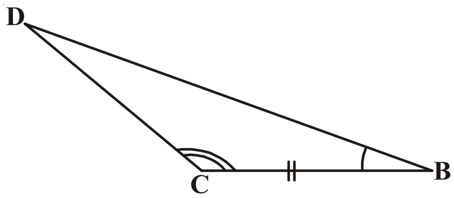


(i) और (ii) से हमें प्राप्त होता है कि : $\angle ACE = \angle BCD$

अब ΔDBC और ΔEAC,

$\angle ACE = \angle BCD$ (ऊपर सिद्ध किया गया)

$BC = AC$ [दिया गया है]



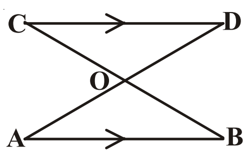
$\angle CBD = \angle EAC$ [दिया गया है]

$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ [दिया गया है]

अतः $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

$DC = EC$.(CPCT के द्वारा)

उदाहरण -6. एक रेखा खण्ड AB दूसरे रेखाखम्ड CD के समानांतर है: O, AD का मध्य बिन्दु है। तो सिद्ध कीजिए



(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O,BC का मध्य बिन्दु है ।

हल : (i) विचार कीजिये कि ΔAOB तथा ΔDOC.

$\angle ABO = \angle DCO$ (एकांतर कोण :$AB \parallel CD$ और BC तिर्यक रेखा है)

$\angle AOB = \angle DOC$ (सम्मुख कोण है)

$OA = OD$ (दिया गया है)

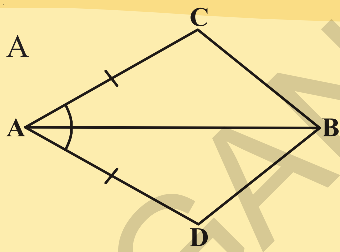
अतः $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS नियम)

(ii) $OB = OC$ (CPCT)

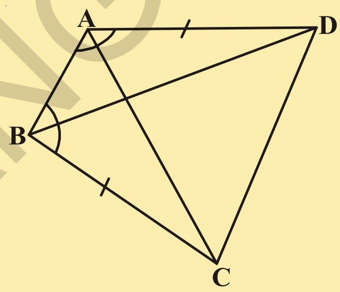
इसलिए, O, BC का मध्यबिन्दु होगा।

अभ्यास- 7.1

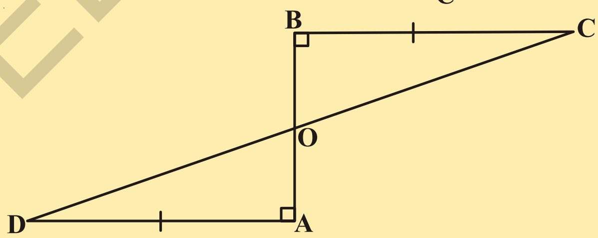
1. दिये गये चतुर्भुज ACBD मे $AC = AD$ और AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है। $\Delta ABC \cong \Delta ABD$. आप BC और BD के विषय में क्या कहोगे ।



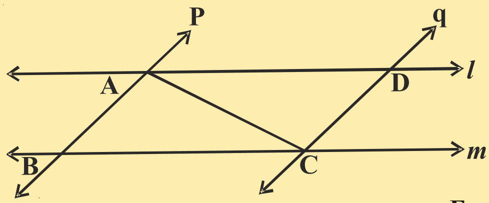
2. ABCD एक चतुर्भुज $AD = BC$ और $\angle DAB = \angle CBA$ है सिद्ध कीजिये कि
   (i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
   (ii) $BD = AC$
   (iii) $\angle ABD = \angle BAC$



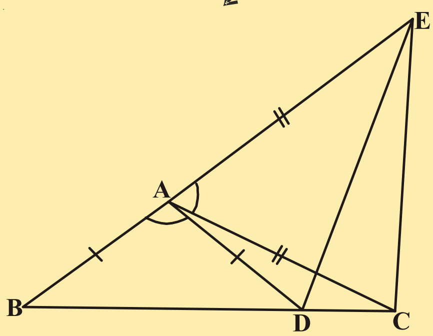
3. एक रेखाखण्ड AB पर, AD तथा BC दो समान लंब रेखाखण्ड है। बताइये कि CD रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करती है ।



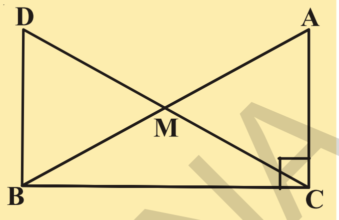
4. l और m दो समांतर रेखायें है जिन्हें समांतर रेखाएँ p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेदित करता है बताइये कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



5. आकृति में $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$. हो तो दर्शाइये कि $BC = DE$ होगा।



6. एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें कोण C समकोण है, M कर्ण AB पर मध्य-बिन्दु है। C को M से मिलकर D तक इस प्रकार बढाया गया है कि DM = CM। बिन्दु D को B से मिला दिया गया है । दर्शाइये कि



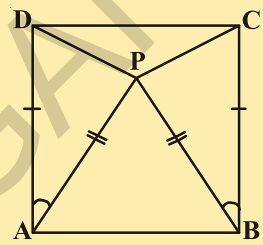
(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle$ DBC एक समकोण है

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

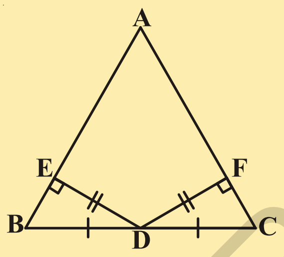
(iv) $CM = \frac{1}{2}AB$

7. संलग्न आकृति में ABCD एक वर्ग है ΔAPB एक समबाहु त्रिभुज है। सिद्ध कीजिये कि $\Delta APD \cong \Delta BPC$.



(**संकेत:** ΔAPD और ΔBPC में $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AP} = \overline{BP}$ और $\angle PAD = \angle PBC = 90^{\circ} - 60^{\circ} = 30^{\circ}$]

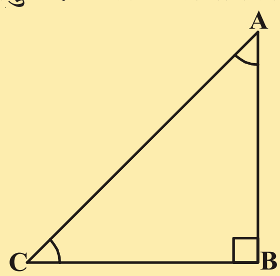
8. संलग्न चित्र में ΔABC में D, BC का मध्यबिन्दु है। $DE \perp AB$, तथा $DF \perp AC$ और DE = DF हो तो बताइये कि $\Delta BED \cong \Delta CFD$.



9. एक त्रिभुज के कोण का समद्विभाजक उसके सम्मुख भुजा को भी समद्विभाजित करता है तो सिद्ध कीजिये कि वह समद्विबाहु त्रिभुज होगा

10. दिये गये त्रिभुज ABC मे एक समकोण त्रिभुज है। और B पर समकोण है जिससे $\angle BCA = 2\angle BAC$ है।

(**संकेत** : CB को D तक बढाओ जिससे BC = BD है)

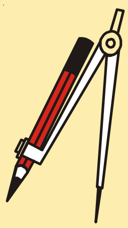


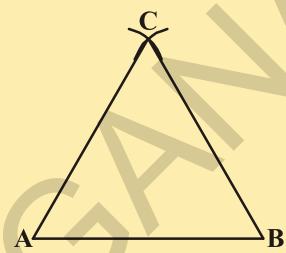
7.4 एक त्रिभुज के कुछ गुण :

ऊपर के विभाग में आपने त्रिभुजों की दो अनुरूपताओं का अध्ययन किया है। आइये इन परिणामों का एक ऐसे त्रिभुज के कुछ गुणों का अध्ययन करने में प्रयोग करे जिसकी दो भुजायें समान होती है।

क्रियाकलाप

i. प्रकार (compass) के उपयोग से त्रिभुज की रचना करने के लिये एक माप लेकर रेखाखण्ड AB खींचो । कुछ लम्बाई लेते हुये प्रकार को खोलिये और उससे A और B से दो चाप खींचिये । आप किस तरह का त्रिभुज प्राप्त करेंगे। यह एक समद्विबाहु त्रिभुज होगा। इसलिये ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है $AC = BC$ के साथ। अब $\angle A$ और $\angle B$ को मोंपिये आप क्या देखेंगे ?

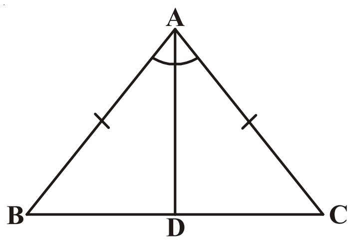




ii. कुछ समद्विबाहु त्रिभुज काटिये । अब त्रिभुज को मोडिये जिस से दो अनुरूप त्रिभुज एक दूसरे पर बराबर बैठते हों । आप $\angle A$ और $\angle B$ के विषय में क्या कहेंगे ?

आप निरीक्षण करेंगे कि ऐसे प्रत्येक त्रिभुज मे समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है । यह एक बहुत मुख्य परिणाम है और वास्तव में यह कोई भी समद्विबाहु त्रिभुज के लिये सत्य सिद्ध होती है। इसको निम्न प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है ।

प्रमेय-7.2 : समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है । इस तथ्य को कई विधियों से सिद्ध किया जा सकता है । इसमें से एक उपपत्ति नीचे दी गई है ।



परिकल्पना : ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$.

सिद्ध करना : $\angle B = \angle C$.

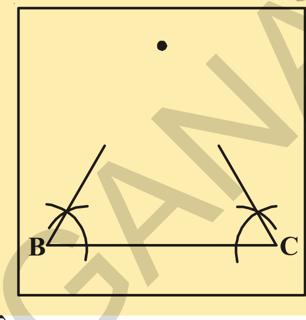
रचना : $\angle A$ का समद्विभाजक उतारिये। मान लिजिये यह BC से D पर मिलता है। अब ΔBAD और ΔCAD मे

$AB = AC$	(दिया गया है)
$\angle BAD = \angle CAD$	(रचना से)
$AD = AD$	(उभयनिष्टभुजा)
अतः $\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(SAS अनुरूपना)
इसलिये $\angle ABD = \angle ACD$	(CPCT)
अर्थात् $\angle B = \angle C$	(समान कोण)

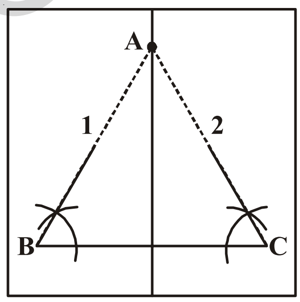
क्या इसका विलोम भी सत्य होगा? अर्थात् यदि किसी त्रिभुज के दो कोण समान हो तो क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि उनकी सम्मुख भुजाये भी समान होगी?

क्रिया कलाप

1. एक अक्षरेखण (Tracing Paper) कागज पर 6 से.मी लम्बाई वाला रेखाखण्ड BC उतारिये ।
2. शीर्ष B और C से 60^0 के दो किरण उतारिये और उनके कटान बिन्दु को B नाम दीजिए।
3. कागज को इस तरह मोडिये कि B और C एक दूसरे पर समाजाये, आप क्या निरीक्षण करोगे? क्या AB = AC होगा।



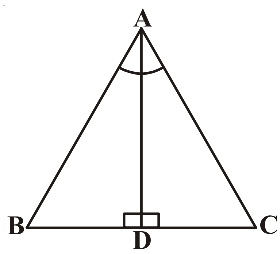
$\angle B$ और $\angle C$ के भिन्न मापों को लेकर इस कार्यविधी को दोहराइये। हर बार आप देखोगे कि समान कोणों की सम्मुख भुजायें समान हैं । इससे हमें यह प्राप्त होता है।



प्रमेय -7.3 : किसी त्रिभुज के समान कोणों की सम्मुख भुजायें समान होती है ?

यह प्रमेय 7.2 का विलोम है ।

आप इस प्रमेय को ASA अनुरूपता नियम के उपयोग से सिद्ध करेंगे।आइये इन परिणामों को स्पष्ट करने के लिये कुछ उदाहरण लें ।



उदाहरण -7. ΔABC में, $\angle A$ का समद्विभाजक AD, भुजा BC पर लम्ब है । दर्शाइये कि AB = AC और ΔABC समद्विबाहु है ।

हल: ΔABD और ΔACD में, $\angle BAD = \angle CAD$ (दिया गया है)

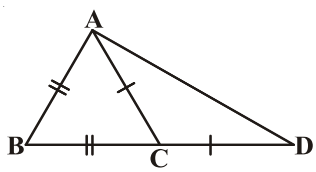
AD = AD (उभयनिष्ठ)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$

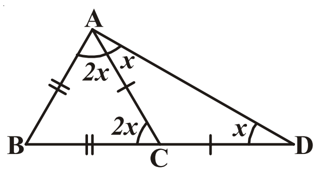
अतः $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA नियम से)

AB = AC (CPCT)

ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है ।



उदाहरण -8. संलग्न चित्र में AB = BC और AC = CD सिद्ध कीजिये $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1$.



हल : मानलो $\angle ADB = x$

ΔACD में $AC = CD$

$\Rightarrow \quad \angle CAD = \angle CDA = x$

और $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA$

$= x + x = 2x$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = \angle ACB = 2x.$ ($\because$ ΔABC में, $AB = BC$)

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

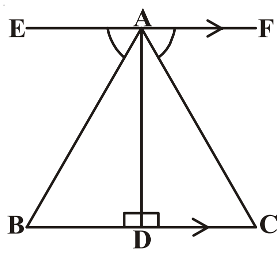
$= 2x + x = 3x$

और $\quad \dfrac{\angle BAD}{\angle ADB} = \dfrac{3x}{x} = \dfrac{3}{1}$

अर्थात $\quad \angle BAD : \angle ADB = 3:1.$

अतः सिद्ध किया गया है।

उदाहरण-9. दिये गये चित्र में AD BC और EF || BC यदि $\angle EAB = \angle FAC$ बताइए कि ABD तथा ACD सर्वसमान है। x और y का मूल्य भी ज्ञात कीजिये यदि $AB = 2x + 3$, $AC = 3y + 1$, $BD = x$ और $DC = y + 1$ है।



हल: AD, EF पर लम्ब है ।

$\Rightarrow \quad \angle EAD = \angle FAD = 90^0$

$\angle EAB = \angle FAC$ (दिया गया है)

$\Rightarrow \quad \angle EAD - \angle EAB = \angle FAD - \angle FAC$

$\Rightarrow \quad \angle BAD = \angle CAD$

इन ΔABD और ΔACD में

$\angle BAD = \angle CAD$ [ऊपर सिद्ध किया गया]

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ [दिया गया है AD, BC पर लम्ब है ।]

और $\quad AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [ASA]

अतः सिद्ध किया गया है ।

$\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow AB = AC$ और $BD = CD$ [C.P.C.T से]

$\Rightarrow 2x + 3 = 3y + 1$ और $x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - 3y = -2$ और $x - y = 1$

x का मूल्य प्रतिस्थापन करने पर $2(1 + y) - 3y = -2$

$x = 1 + y \qquad 2 + 2y - 3y = -2$

$-y = -2 - 2$

$-y = -4$

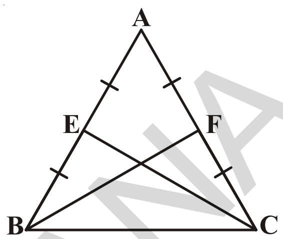
प्रतिस्थापित करने पर $y = 4$ in $x = 1 + y$

$x = 1 + 4$

$x = 5$

उदाहरण -10. E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की समान भुजाएँ AB और AC के मध्यबिन्दु हैं। (चित्र देखिये)

बताईये कि BF = CE है



हल : ΔABF और ΔACE,

AB = AC (दिया है)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

AF = AE (समान भुजाओं के आधे भाग)

अतः $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (SAS नियम)

इसलिये, BF = CE (CPCT)

उदाहरण-11. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसमें AB = AC तथा भुजा BC पर दो बिन्दु D और E पर इस प्रकार स्थित है कि BE = CD (चित्र देखिये) AD = AE को सिद्ध कीजिए।

हल: ΔABD और ΔACE में,

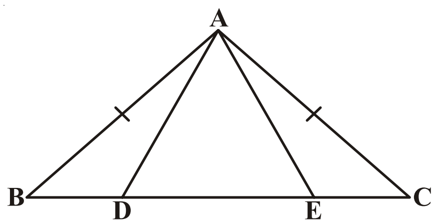
AB = AC (दिया गयाहै) .... (1)

$\angle B = \angle C$ .... (2)

साथ ही, BE = CD (दिया गया है)

इसलिये BE – DE = CD – DE

अर्थात BD = CE (3)



अतः $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

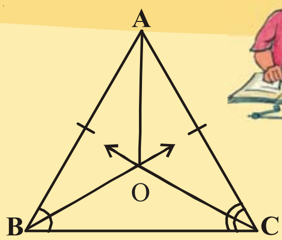
((1), (2), (3) और SAS नियम द्वारा).

प्राप्त होता है : AD = AE (CPCT)

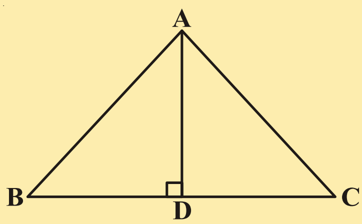
अभ्यास - 7.2

1. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC है, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते है। A और O को जोडिये तथा सिद्ध कीजिए।

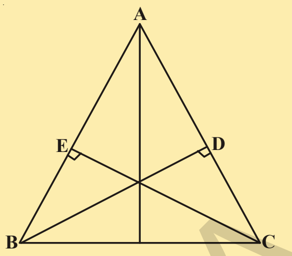
(i) OB = OC (ii) AO कोण $\angle A$ को समद्विभाजित करता है ।

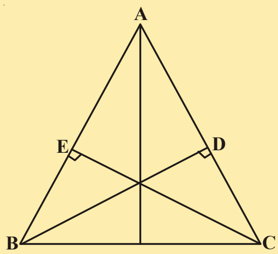


2. ΔABC में AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है। दर्शाइये कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमे AB=AC है।

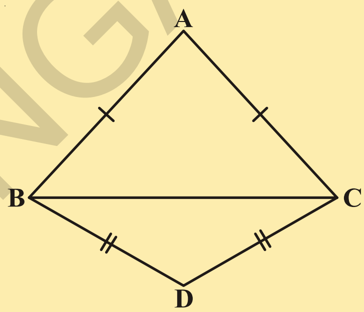


3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें समान भुजाएँ AC और AB पर क्रमाशः शीर्ष लम्ब BD और CE खींचे गये हैं। दर्शाइये कि ये लम्ब बराबर है।





4. ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गये शीर्षलम्ब BD और CE समान हैं। तो सिद्ध कीजिए।
   (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$
   (ii) $AB = AC$ अर्थातABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



5. ΔABC और ΔDBC समान आधार BC पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं। दर्शाइये कि $\angle ABD = \angle ACD$ है।

7.5 त्रिभुज अनुरूपता के कुछ और नियम :

7.4 प्रमेय (SSS अनुरूपता नियम) : रचना के द्वारा हमने देखा कि SSS अनुरूपता सत्य है। इस प्रमेय को हम उचित रचना के द्वारा सिद्ध कर सकते हैं।

दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजायें दूसरे अन्य त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनो त्रिभुज अनुरूप होते है।

• **SSS अनुरूपता के नियम की उपपत्ति**

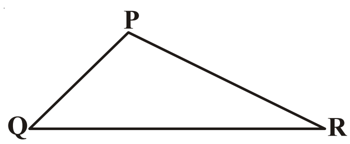
परिकल्पना : ΔPQR औरΔXYZ इस तरह है के $PQ = XY$, $QR = YZ$ और $PR = XZ$

निषकर्ष: $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

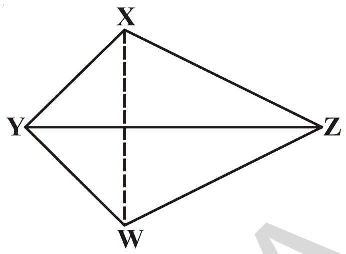
रचना : रेखा YW इस तरह खिंचो $\angle ZYW = \angle PQR$ और $WY = PQ$. है XW और WZ को मिलाओ।

उपपत्ति: ΔPQR और ΔWYZ

$QR = YZ$	(दिया गया है)
$\angle PQR = \angle ZYW$	(रचना द्वारा)
$PQ = YW$	(रचना द्वारा)
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta WYZ$	(SAS अनुरूपता नियम)



$\Rightarrow \angle P = \angle W$ और $PR = WZ$ (CPCT)



$PQ = XY$ (दिया गया है) और $PQ = YW$ (रचना द्वारा)

$\therefore XY = YW$

इसी तरह, $XZ = WZ$

ΔXYW में $XY = YW$

$\Rightarrow \angle YWX = \angle YXW$ (एक त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है)

इसी तरह, $\angle ZWX = \angle ZXW$

$\therefore \angle YWX + \angle ZWX = \angle YXW + \angle ZXW$

$\Rightarrow \angle W = \angle X$

अब $\angle W = \angle P$

$\therefore \angle P = \angle X$

ΔPQR और ΔXYZ $PQ = XY$

$\angle P = \angle X$

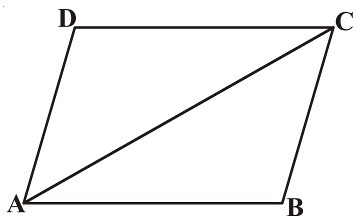
$PR = XZ$

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (SAS अनुरूपता)

इसी पर आधारित एक उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण-12. चतुर्भुज ABCD में, $AB = CD$, $BC=AD$ बताइये कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

ΔABC और ΔCDA पर विचार कीजिये।



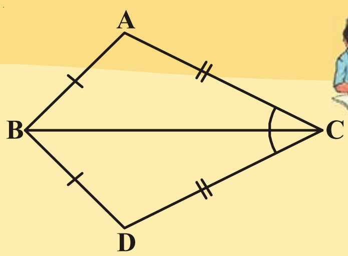
$AB = CD$ (दिया गया है)

$AD = BC$ (दिया गया है)

$AC = CA$ (समान भुजा)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (SSS अनुरूपता से)

प्रयत्न कीजिए



1. संलग्न चित्र में ΔABC और ΔDBC दो त्रिभुज है जिस $\overline{AB} = \overline{BD}$ और $\overline{AC} = \overline{CD}$. बताइये कि $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.

SAS अनुरूपता में आपने देखा है कि समान संगत भुजाओं के युग्मों के बीच कोण में होना चाहिए और यदि ऐसा नहीं है, तो दोनो त्रिभुज सर्वसमान नही हो सकते हैं ।

क्रिया कलाप

दो समकोण त्रिभुज बनाइये जिसके कर्ण 5 से.मी. और एक भुजा उसे भी लम्बी है। कितने भिन्न त्रिभुज बनाये जा सकते है ? अपने त्रिभुज की तुलना मित्रों के त्रिभुजों से कीजिये । क्या वे त्रिभुज अनुरूप है? इन्हे काटिये और एक दूसरे पर इस प्रकार रखिये कि इनकी बराबर भुजाये एक दूसरे पर आयें । यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुजों को घुमाइये। आपने क्या देखा? आप आप देखेंगे कि दो होंगे यदि एक त्रिभुज की भुजा और कर्ण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की भुजा और कर्ण के समान हो तो समकोण त्रिभुज अनुरूप होंगे। वे ध्यान दीजिये कि इस स्थिति समकोण अंतर्गत कोण नहीं है। इसलिए हम निम्न अनुरूपता के नियम पर पहुँचते हैं।

प्रमेय 7.5 (RHS congruence rule) : अनुरूपता नियम : यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा, क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज अनुरूप होते हैं।

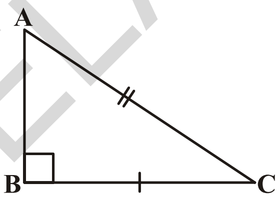
ध्यान दीजिये कि यहाँ RHS समकोण - कर्ण - भुजा को दर्शाता है अब हम सिद्ध करेंगे।

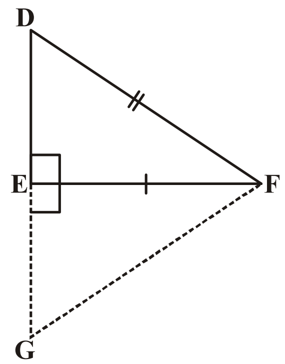
परिकल्पना : ΔABC तथा ΔDEF दो समकोण त्रिभुज है। जिसमें

$\angle B = 90^o$ और

$\angle E = 90^o$ $AC = DF$

और $BC = EF$.





निष्कर्ष: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

रचना: DE को G तक बढाओ, जिससे $EG = AB$. GF को मिलाओ

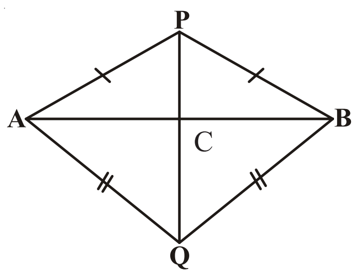
उपपत्ति:

कथन	**कारण**
ΔABC और ΔGEF में, प्राप्त हैं	
$AB = GE$	(रचना से)
$\angle B = \angle FEG$	(प्रत्येक कोण 90^0 है)
$BC = EF$	(दिया गया है)
$\Delta ABC \cong \Delta GEF$	(SAS अनुरूपता)
इसलिए $\angle A = \angle G$ … (1)	(CPCT)

AC = GF … (2)	(CPCT)
आगे AC=GF और AC=DF	((2) से और दिया गया)
अतःDF = GF	(ऊपर से)
इसलिये, , $\angle D = \angle G$ … (3)	(समान भुजाओं के समुख कोण समान है)
हमे प्राप्त है, $\angle A = \angle D$ … (4)	(समान भुजाओं के समुख कोण समान है)
अतः ΔABC और ΔDEF $\angle A = \angle D$,	(4 से)
$\angle B = \angle E$	(दिया गया है)
इसलिये $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$	(जोडने पर)
लेकिन $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ और	(त्रिभुज के तीन कोणों का योग)
$\angle D + \angle E + \angle F = 180^0$	
180 - $\angle C$ = 180 - $\angle F$	($\angle A+\angle B=180^0-\angle C$ and $\angle D+\angle E=180^0-\angle F$)
इसलिये $\angle C = \angle F$, … (5)	(रद्द करने का नियम)
अब, ΔABC औक ΔDEF, प्रापत है	
BC = EF	(दिया गया है)
$\angle C = \angle F$	(5 से)
AC = DF	(दिया गया है)
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	(SAS अनुरूपता से)

उदाहरण-13. AB एक रेखा खण्ड है तथा बिन्दु P और Q इस रेखा खण्ड के दोनों ओर इस प्रकार स्थित है कि दोनों A और B से समान दूरी पर है।बताइये कि रेखा PQ रेखाखण्ड AB का लम्ब समद्विभाजक है ।

हलः दिया गया है कि PA = PB और QA = QB है। आपको सिद्ध करना है कि PQ, AB पर लम्ब है। PQ रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करती है । मानलो रेखा PQ रेखा खण्ड AB को C पर प्रतिच्छेद करती है। क्या आप इस आकृति में दो अनुरूप त्रिभुजों को देख सकते हो ?



आइये ΔPAQ और ΔPBQ.

इन त्रिभुजों में

AP = BP (दिया गया है)

AQ = BQ (दिया गया है)

PQ = PQ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS नियम)

इसलिये $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT).

अब ΔPAC और ΔPBC को लिजिये। आपको प्राप्त है :

AP = BP (दिया गया है)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ उपर सिद्ध किया गया)

$PC = PC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

इसलिये $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS नियम)

अतः $AC = BC$ (CPCT) .... (1)

और $\angle ACP = \angle BCP$ (CPCT)

यह भी है कि $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (रैखिक युग्म)

इसलिये, $2\angle ACP = 180°$

या $\angle ACP = 90°$ .... (2)

(1) और (2) आप निष्कर्ष निकाल सकते है कि रेखा PQ रेखाखण्ड AB का लम्ब समद्विभाजक है ।

[ध्यान दीजिये कि ΔPAQ और ΔPBQ, की अनुरूपता दर्शाये बिना, आप यह नही बता सकते कि $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ यद्यपि $AP = BP$ (दिया गया)

$PC = PC$ (उभयष्ठि)

और $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB के समान भुजाओ के सम्मुख कोण)

कारण यह है कि इनसे हमें SSA नियम प्राप्त होता है, जो त्रिभुजों की अनुरूपता के लिये हमेशा माना नहीं जाता है। साथ ही, कोण समान भुजाओं के अंतर्गत नहीं है ।

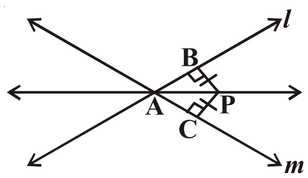
आइये कुछ और उदाहरण देखें।

उदाहरण-14. बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं l और m से समान दुरी पर एक बिन्दु P है। दर्शाइये कि रेखा AP दोनों रेखाओं के बीच बनने वाले कोण को समद्विभाजित करती है ।

हल : आपको दिया गया है कि रेखायें l और m पर प्रतिच्छेद करती हैं।

मानलो $PB \perp l$ और $PC \perp m$. है। यह दिया गया है कि $PB = PC$ है।

आपको दर्शाना है कि $\angle PAB = \angle PAC$ है



अब ΔPAB और ΔPAC में

$PB = PC$ (दिया है)

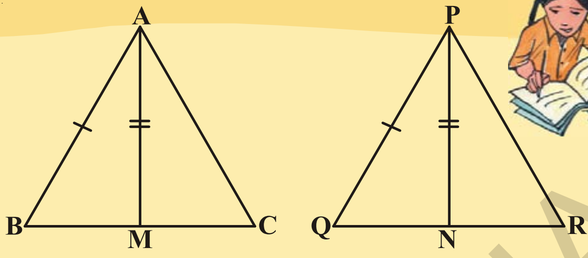
$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (दिया है)

$PA = PA$ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (RHS नियम)

अतः $\angle PAB = \angle PAC$ (CPCT)

अभ्यास - 7.3



1. समद्विबाहु ΔABC में AD उसकी ऊँचाई है जिसमें $AB = AC$ हो तो बताइये कि,

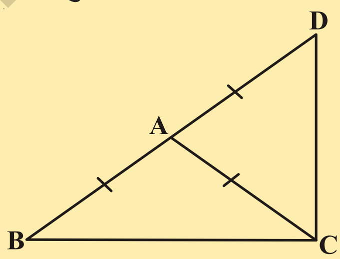
   (i) AD, BC को समद्विभाजित करता है (ii) AD, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है ।

2. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाये AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के समान है ΔPQR (चित्रमें). दर्शाइये कि

   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

3. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो समान शीर्ष लम्ब है। RHS अनुरूपता का नियम के प्रयोग से सिद्ध कीजिये ABC एक समद्बबाहु त्रिभुज है ।



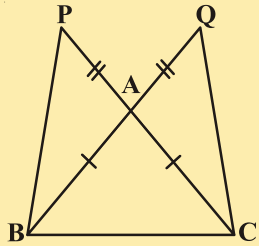
4. ΔABC एक समद्बबाहु त्रिभुज है जिसमे $AB = AC$ बताइये $\angle B = \angle C$.

   (**संकेत**: $AP \perp BC$) (RHS अनुरूपता के उपयोग से)

5. ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमे $AB = AC$ भुजा BA को D तक बढाया गया जिससे $AD = AB$ (चित्र देखिए) बताइये कि $\angle BCD$ समकोण है ।

6. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। $AB \perp AC$ खींच कर दर्शाइये कि $\angle A = 90^0$ तथा $AB = AC$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\angle B = \angle C$ है ।

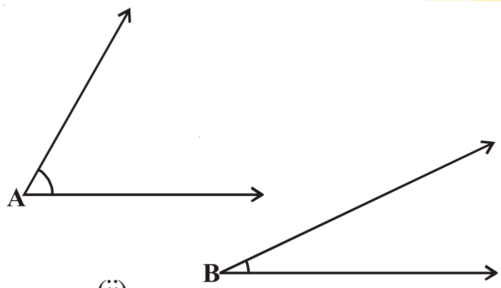
7. दर्शाइये कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येककोण 60^0 का होता है।



8. संलग्न चित्र में ΔABC समद्विबाहु $AB = AC$, BA और CA को Q और P तक क्रमशः बढाया गया है, जिससे AQ=AP. हो। बताइये कि PB=QC

(**संकेत:** ΔAPB और ΔAQC की तुलना कीजिये)

(i)



(ii)

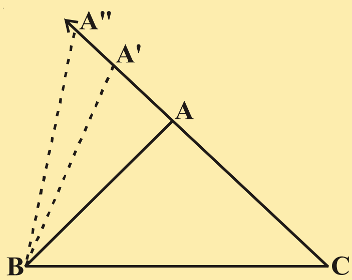
7.6 एक त्रिभुज की असमानताएँ (Inequalities)

आपने, अब तक एक त्रिभुज की भुजाओं और काणो की समानताओं के विषय में पढा है। कभी कभी हमारे सम्मुख असमान वस्तुयें भी आती है हमें इसकी तुलना भी करती पडती है। उदाहरणार्थ, चित्र में (i) रेखाखण्ड AB रेखाखण्ड CD से बडा है और आकृति (ii) में $\angle B$ $\angle A$ बडा है ।

आइये अब इसकी जाँच करें कि क्या किसी त्रिभुज में असमान भुजाओं तथा असमान कोणों का कुछ संबंध होता है। इसके लिये आइये निम्न कार्य कलाप करेंगे ।

क्रिया कलाप :

1. त्रिभुज ABC उतारिये और A' बिन्दु को CA पर अंकित कीजिए जिससे $A'C > AC$ (लम्बाई की तुलना)
   A' को B से मिलाओ और त्रिभुज $A'BC$ पूर्ण करो
   $\angle A'BC$ और $\angle ABC$ के विषय मे आप क्या कहोंगे ?
   उनकी तुलना कीजिये। आप क्या देखोंगे ?



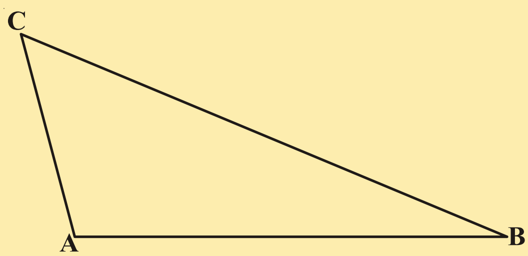
स्पष्ट है कि $\angle A'BC > \angle ABC$

CA पर और अधिक बिन्दु अंकित करते रहिये, तथा अंकित बिन्दुओं से और भुजा BC के साथ त्रिभुज खींचते रहिये ।

आप देखोगे कि जैसे AC बढती जाती है (A की विभिन्न स्थितियों को अंकित करने पर), वैसे इसका सम्मुख कोण, अर्थात् $\angle B$ भी बढता जाता है ।

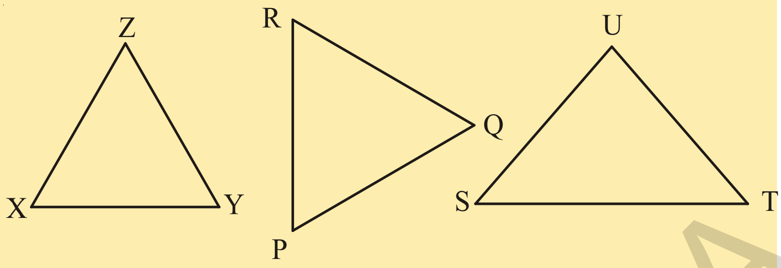
आइये अब एक अन्य क्रियाविधी को करेंगे :

2. कार्यविधिः एक विषम बाहु त्रिभुज उतारिये (अर्थात् ऐसा त्रिभुज जिसमें सभी भुजाओं की लम्बाईयाँ भिन्न हों) इस त्रिभुज की भाजुओं की लम्बाई और कोण का मापन कीजिये।
   आप क्या देखते है? आप क्या निरीक्षण करोगे ?



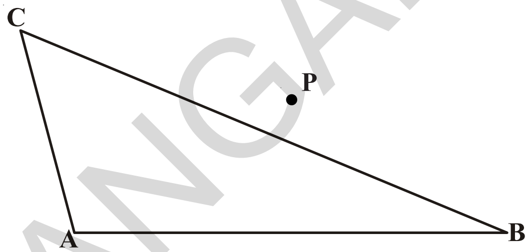
चित्र के ΔABC मे, BC सबसे लम्बी भुजा है और AC सबसे छोटी भुजा है ।

साथ ही $\angle A$ सबसे बडा है और $\angle B$ सबसे छोटा है ।



ऊपर के त्रिभुज की भुजाओं और कोणों को मापिये। त्रिभुज की भुजा और उसके सम्मुख कोण मे क्या संबंध है, जब आप उनको दूसरे जोडियों से तुलना करेंगे ?

प्रमेय-7.6 : यदि एक त्रिभुज की दो भुजाये असमान है, तो लम्बी भुजा का सम्मुख कोण बडा होगा ।

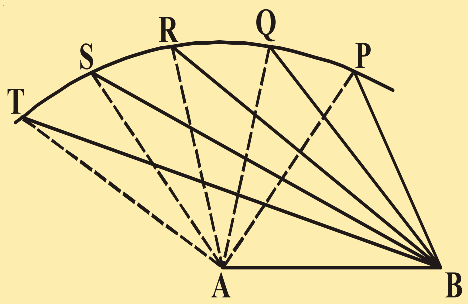


आप इस प्रमेय को BC पर एक बिन्दु P लेकर जिससे CA = CP जैसे कि संलग्न चित्र में दिखाया गया है, सिद्ध कर सकते हैं ।

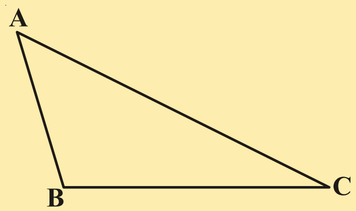
अब हम अन्य क्रियाकलाप करेंगे ।

क्रियाकलाप

एक रेखा खण्ड AB उतारिये A को केन्द्र मानकर और कुछ त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिये और उस पर P, Q, R, S, T बिन्दु अंकित कीजिये ।



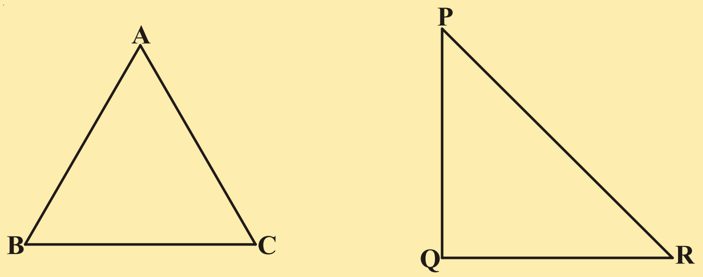
इन बिन्दुओं को A और B दोनों से मिलाइए। ध्यान दीजिये कि जैसे हम P से T की ओर चलते है, वैसे $\angle A$ बढता जाता है। इसकी सम्मुख भुजाओं की लम्बाइयों को क्या हो रहा है? अर्थात $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ और $TB > SB > RB > QB > PB$.



अब कोई ऐसा त्रिभुज खींचिये जिसके सभी कोण असमान हैं। इस त्रिभुज की भुजाओं को मापिये। निरीक्षण कीजिये कि सबसे बडे बडा कोण $\angle B$ है और AC सबसे लम्बी भुजा है ।

कुछ और त्रिभुज खींचकर इस कार्यकलाप को दोहराइये और देखिये कि प्रमेय 7.6 का विलोम भी सत्य सिद्ध होता है ।

नीचे दिये गये प्रत्येक त्रिभुज की भुजाये और कोणों को मापो। आप प्रत्येक त्रिभुज की भुजा और उसके सम्मुख कोण के विषय में क्या कल्पना करोगे ?



इस प्रकार हम निम्न प्रमेय पर पहुँचेंगे ।

प्रमेय -7.7 : किसी त्रिभुज में बडे कोण की सम्मुख भुजा बडी होती है। इस प्रमेय को विरोधाभास (contradiction) की विधी से सिद्ध किया जा सकता है।

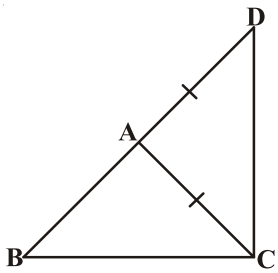
प्रयत्न कीजिये

अब एक त्रिभुज ABC खींचिये और इसमें $AB + BC$, $BC + AC$ और $AC + AB$ ज्ञात कीजिये आप क्या निरीक्षण करोगे ?

आप निरीक्षण करोगे कि $AB + BC > AC$, $BC + AC > AB$ और $AC + AB > BC$.

कुछ और त्रिभुज लेकर, इस कार्यकलाप को दोहराइये और निम्न प्रमेय पर पहुँचिये :

प्रमेय-7.8 : त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बडा होता है ।

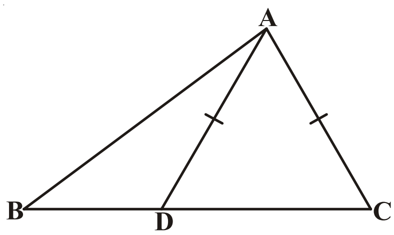


संलग्न चित्र में दिये गये त्रिभुज ABC का निरीक्षण करने पर हमें ज्ञात होता है कि भुजा BA को एक बिन्दु D तक इस प्रकार बढाया गया है कि $AD = AC$ है। क्या आप बता सकोंगे कि $\angle BCD > \angle BDC$ और $BA + AC > BC$? क्या आप उपरोक्त प्रमेय की उपपत्ति पर पहुँच पाओगे?

आइये इन परिणामों पर कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण-15. ΔABC की भुजा BC पर D ऐसा बिन्दु है कि $AD = AC$ है (चित्र देखिये)। सिद्ध कीजिए $AB > AD$ है ।

हल : ΔDAC में,



$AD = AC$ (दिया गया है)

इसलिए, $\angle ADC = \angle ACD$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, $\angle ADC$ त्रिभुज ABD का एक बाह्यकोण है ।

इसलिए, $\angle ADC > \angle ABD$

या, $\angle ACD > \angle ABD$

या, $\angle ACB > \angle ABC$

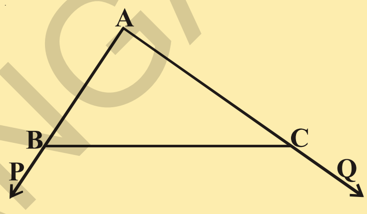
अतः, $AB > AC$ (ΔABC में बडे कोण की सम्मुख भुजा)

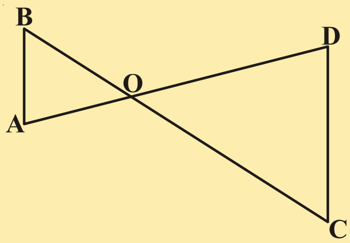
या, $AB > AD$ ($AD = AC$)

अभ्यास - 7.4

1. दर्शाइये कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लम्बी भुजा होती है ?

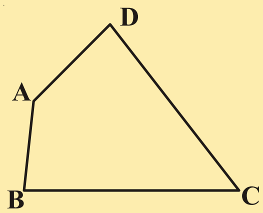
2. संलग्न चित्र में, ABC की भुजाएँ AB और AC को क्रमशः बिंदु P और Q तक बढाया गया है। साथ ही, $\angle PBC < \angle QCB$.है। सिद्ध कीजिए $AC > AB$ है।

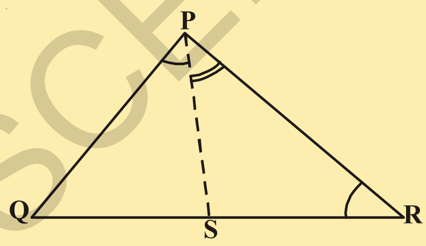




3. दिये गये चित्र मे $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है। बताइये कि $AD < BC$ है ।

4. AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबस छोटी और सबसे बडी भुजायें है बताइये कि $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$ है।





5. संलग्न आकृति दृथ $PR > PQ$ है और PS $\angle QPR$ को समद्विभाजित करता है। सिद्ध करो कि Prove that $\angle PSR > \angle PSQ$ है।

6. यदि त्रिभुज की दो भुजायें 4से.मी और 6 से.मी है तो तीसरी भुजा के सभी संभव माप ज्ञात कीजिये (धन पूर्णांक) कितने अलग त्रिभुज बनेंगे ?

7. 5 से.मी, 8 से.मी और 1से.मी त्रिभुज की रचना करने का प्रयास कीजिये । क्या यह संभव है या नहीं? अपना औचित्य दीजिये ?

हमने क्या सीखा?

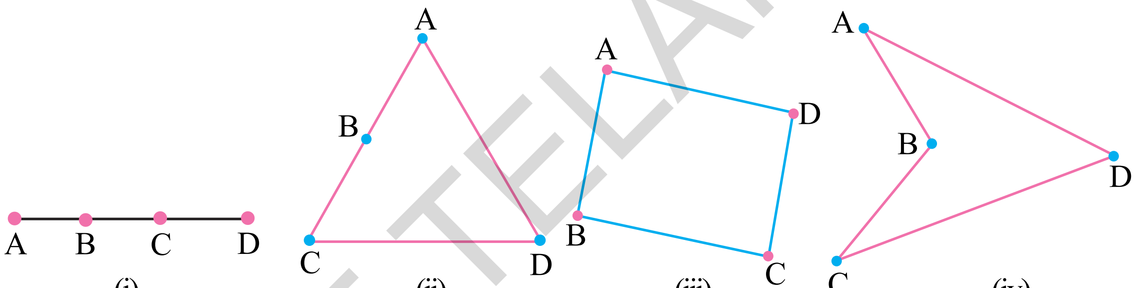
- जो आकृतियाँ समदर्शी है अर्थात् समान आकृति और परिमाण हो तो वे आकृतियाँ सर्वसमान या अनुरूप कहलाते हैं ?
- एक अद्वितीय त्रिभुज के निर्माण के लिये तीन स्वतंत्र मापों की आवश्यकता होती हैं।
- दो त्रिभुज अनुरुप होते है, यदि उनकी संगत कोण सर्वसमान हो तथा उनकी संगत भुजायें समान हो।
- साथ ही, शीर्षो के बीच में एक-एक संगतता होती है ।
- सर्वसमान त्रिभुजों में संगत भाग भी समान होते है और हम इसे संक्षिप्त में 'CPCT' लिखते है जो सर्वसमान त्रिभुजों के संगत भागों का सूचक है ।
- SAS अनुरूपता नियमः दो त्रिभुज अनुरूप होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों ।
- ASA अनुरूपता नियमः दो त्रिभुज अनुरूप है, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा समान हो ।
- समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं ।
- उसका विलोम, त्रिभुज के समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं ।
- SSS अनुरूपता नियम दो त्रिभुज अनुरूप होते हैं, यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाये दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समान हो ।
- RHS अनुरूपता नियमः दो त्रिभुज अनुरूप है, यदि त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा, क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के समान हो ।
- यदि त्रिभुज की दो भुजायें असमान हैं, तो लम्बी भुजा का सम्मुख कोण बडा होता है ।
- किसी त्रिभुज में, बडे कोण की सम्मुख भुजा बडी होती है ।
- एक त्रिभुज की दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा से अधिक होता है ।
- रेखाएँ, रेखाखण्ड तथा किरणों का निरुपण LM= रेखाखण्ड LM की लम्बाई $\overrightarrow{LM}$ =किरण LM ; $\overrightarrow{LM}$ = रेखा LM

08

चतुर्भुज
(QUADRILATERALS)

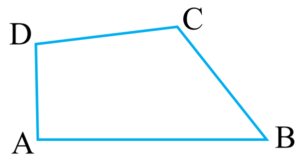
8.1 प्रस्तावना

तुमने पूर्व अध्याय में प्रमाणों के साथ त्रिभुज के बहुत से गुणों के बारे में पढ़ा था। तुम जानते हो कि तीन असंरेखिय बिन्दुओं को युग्मों में जोड़ने से त्रिभुज प्राप्त होता है। क्या तुम जानते हो कि समतल में चार बिन्दुओं से कौनसी आकृति प्राप्त होती है? ध्यान दीजिए कि यदि सभी बिन्दु संरेखीय हो तो हम एक रेखाखण्ड प्राप्त करते हैं, यदि चार बिन्दुओं में से तीन संरेखीय हो तो हम एक त्रिभुज प्राप्त करते हैं, और यदि कोई भी तीन बिन्दु संरेखीय न हो तब हमें एक चार भुजाओं की बंद आकृति प्राप्त होती है। एसी आकृति को हम चतुर्भुज कहते हैं।



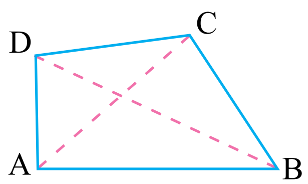
(i) (ii) (iii) (iv)

तुम आसानी से अनेक चतुर्भुजों को खींच सकते हैं । तुम्हारे चारों ओर पाये जाने वाले चतुर्भुजों को पहचानिए आकृति (iii) और (iv) में बने चतुर्भुज एक महत्वपूर्ण पहलू में भिन्नता दर्शाते है। वे किस तरह भिन्न है?



इस अध्याय में हम केवल आकृति (Fig (iii)) प्रकार के चतुर्भुज का अभ्यास करेंगे। ये उत्तल चतुर्भुज है।

चतुर्भुज एक समतल में चार रेखाओं द्वारा परिबद्ध सरल बंद आकृति है।



चतुर्भुज ABCD को चार भुजाएँ AB, BC, CD और DA है, चार शीर्ष A, B, C और D है। शीर्षों पर बने चार कोण $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ होते हैं।

जब हम सम्मुख शीर्ष (A, C) और (B, D) जोड़ते हैं (आकृति (vi)), तब चतुर्भुज के कर्ण AC और BD प्राप्त होते हैं।

8.2 चतुर्भुज के गुण (Properties of Quadrilater)

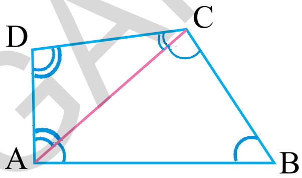
चतुर्भुज के भीतर चार कोण होते हैं। क्या हम ये चार कोणों का योग ज्ञात कर सकते हैं? त्रिभुज के कोणों के योग के बारे में याद कीजिए। हम इस गुण का उपयोग चतुर्भुज के चारों अंतः कोणों का योग ज्ञात करेने के लिए करते हैं।

ABCD एक चुतुर्भुज है और AC कर्ण है (आकृति देखिए)

हम जानते हैं कि ΔABC के तीन कोणों का योग है,

$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^o$ ...(1) (त्रिभुज का कोणों का योग गुण)

इसी प्रकार, ΔADC में.



$$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180^o \quad ...(2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA + \angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180^o + 180^o$$

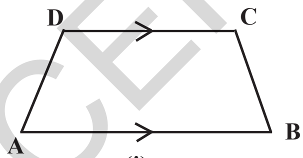
यूँकि $\angle CAB + \angle CAD = \angle A$ and $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

इसलिए, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$

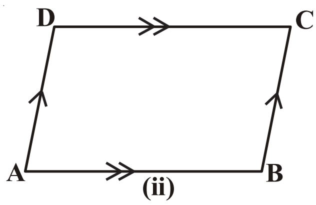
अर्थात् चतुर्भुज के चार कोणों का योग 360^o अथवा चार समकोण रहता है।

8.3 चतुर्भुज के विभिन्न प्रकार (Different Types of Quadrilaters)

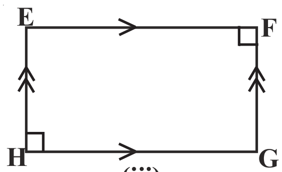
नीचे दिए गए चतुर्भुजों की ओर देखिए? इनमें से बहुत से हम इसके पूर्व देखे हैं। हम इन्हें ऊपरी तौर पर देखेंगे हैं और इनके गुणों पर आधारित उनके विशिष्ट नामों को याद करेंगे।



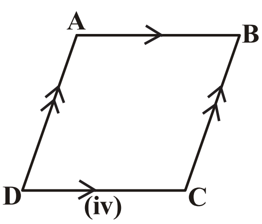
(i)



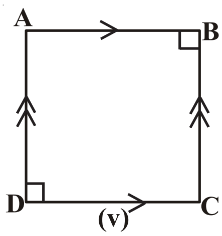
(ii)



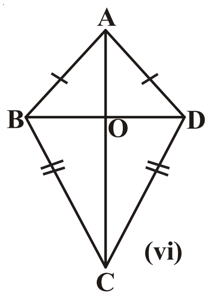
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

हमने अवलोकन क्रिया कि

- आकृति (i) में, चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ AB और DC एक दुसरे को समानान्तर है। ऐसा चतुर्भुज, **समलंब चतुर्भुज** कहलाता है।

  यदि समलंब चतुर्भुज में असमानान्तर भुजाएँ समान हो तब यह **समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज** कहलाता है।
- आकृति (ii) में, चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समानान्तर है। ऐसा चतुर्भुज, समानांतर चतुर्भुज कहलाता है। आकृति (iii), (iv) और (v) भी **समानांतर चतुर्भुज है।**
- आकृति (iii) में समानांतर चतुर्भुज EFGH के सभी कोण समकोण है। अतः इसे आयत कहते है।
- आकृति (iv) में, समानांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ समान है और यह **समचतुर्भुज** कहलाता है।
- आकृति (v) में. समानांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ समान और प्रत्येक कोण $90°$ है। यह **वर्ग** कहलाता है।
- आकृति (vi) में चतुर्भुज ABCD के दो संलग्न भुजाओं के युग्म समान है, अर्थात् $AB = AD$ और $BC = CD$. यह **पतंग आकृति** कहलाती है।

निशा क्या कहती है, ध्यान दीजिए :

एक समचतुर्भुज, वर्ग हो सकता है परंतु सभी वर्ग, समचतुर्भुज नहीं हो सकते हैं।

ललीता आगे कहती है :

सभी आयत, समानांतर चतुर्भुज रहते हैं परन्तु सभी समानांतर चतुर्भुज आयत नहीं होते।
इनमें से कौनसे कथन के साथ तुम सहमत हो?

तुम्हारे उत्तर के लिए कारण बताइए। चतुर्भुज के विभिन्न प्रकारों के लिए ऐसे और कथन लिखिए।

व्याख्यात्मक उदाहरण :

उदाहरण-1. ABCD समानांतर चतुर्भुज है और $\angle A = 60^o$ तो शेष कोणों को ज्ञात कीजिए।

हल : समानांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान रहते हैं।

अतः समानांतर चतुर्भुज ABCD में,

$\angle C = \angle A = 60^o$ और $\angle B = \angle D$

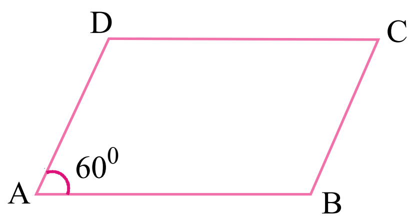
समानांतर चतुर्भुज के क्रमित कोणों का योग 180^o रहता है।

चूँकि $\angle A$ और $\angle B$ क्रमित कोण है

$\angle D = \angle B = 180^o - \angle A$

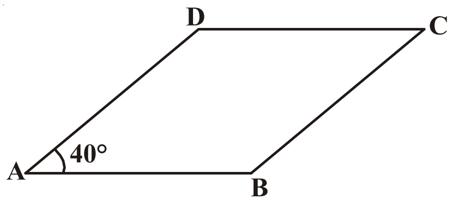
$= 180^o - 60^o = 120^o$.

इस तरह, शेष कोण $120^o, 60^o, 120^o$.



उदाहरण-2. समानांतर चतुर्भुज ABCD में $\angle DAB = 40^o$, इसके शेष कोण ज्ञात कीजिए।

हल :



ABCD समानांतर चतुर्भुज है।

$\angle DAB = \angle BCD = 40°$ और $AD \parallel BC$

यूँकि क्रमिक कोणों का योग

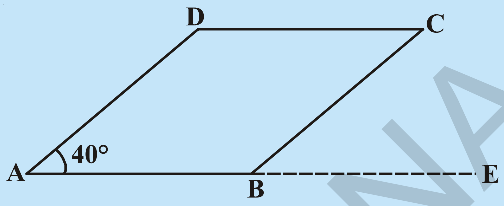
$\angle CBA + \angle DAB = 180°$

$\therefore \angle CBA = 180 - 40°$

$= 140°$

इससे हम ज्ञात कर सकते हैं, $\angle ADC = 140°$ और $\angle BCD = 40°$

यह प्रयत्न कीजिए :



AB को E तक बढाईए। $\angle CBE$ ज्ञात कीजिए। तुम क्या देखते हो? कौनसे प्रकार के कोण $\angle ABC$ और $\angle CBE$ है?

उदाहरण-3. समानांतर चतुर्भुज की दो संलग्न (आसन्न) भुजाएँ 4.5 सें.मी. और 3 सें.मी. है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि समानांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान रहती है, शेष दो भुजाएँ 4.5 सें.मी. और 3 सें.मी. है।

अतः परिमाप = 4.5 + 3 + 4.5 + 3 = 15 सें.मी.

उदाहरण-4. समानांतर चतुर्भुज ABCD में, क्रमित कोण $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक P पर प्रतिच्छेद करते हैं। बताईए कि $\angle APB = 90^o$.

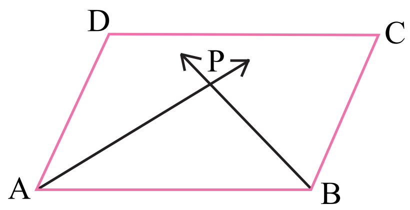
हल : ABCD समांतर चतुर्भुज है। क्रमित कोण $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक $\overrightarrow{AP}$ और $\overrightarrow{BP}$ है।

यूँकि समांतर चतुर्भुज के क्रमित कोणों का योग संपूरक रहता है,

$\angle A + \angle B = 180^o$

$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180}{2}$

$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90^o$



ΔAPB में,

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^o$ (त्रिभुज के कोणों का योग गुण)

$\angle APB = 180^0 - (\angle PAB + \angle PBA)$

$= 180^0 - 90^0$

$= 90^0$

अतः यह सिद्ध होता है।

अभ्यास - 8.1

1. निम्न कथन सही या गलत है, स्पष्ट कीजिए :
   (i) प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज, समलंब चतुर्भुज होता है। ( )
   (ii) सभी समानान्तर चतुर्भुज, चतुर्भुज होते हैं। ( )
   (iii) सभी समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज होते हैं। ( )
   (iv) एक वर्ग, समचतुर्भुज होता है। ( )
   (v) प्रत्येक समचतुर्भुज, वर्ग रहता है। ( )
   (vi) सभी समानान्तर चतुर्भुज, आयत रहते हैं। ( )

2. निम्न सारणी (हाँ) लिखकर पूर्ण कीजिए यदि किसी विशिष्ट चतुर्भुज के लिए गुण सही है और यदि गुण सही नही हो तो (नहीं) लिखिए।

गुण	समलंब चतुर्भुज	समांतर चतुर्भुज	समचतुर्भुज	आयत	वर्ग
a. सम्मुख भुजाओं का एकही युग्म समांतर रहता है।	हाँ				
b. सम्मुख भुजाओं के दो दो युग्म समांतर रहते हैं।					
c. सम्मुख भुजाएँ समान रहती हैं।					
d. सम्मुख कोण समान रहते हैं।					
e. क्रमिक कोण संपूरक रहते हैं।					
f. कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।					
g. कर्ण समान रहते हैं।					
h. सभी भुजाएँ समान रहते हैं।					
i. प्रत्येक कोण समकोण रहता है।					
j. कर्ण एक दूसरे पर लंब रहते हैं।					

3. समलंब चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel CD$, यदि $AD=BC$ तो बताईए कि $\angle A = \angle B$ और $\angle C = \angle D$.

4. चतुर्भुज के चार कोणों में अनुपात 1: 2:3:4 है। चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का माप बताईए।

5. आयत ABCD का कर्ण AC है। ΔACD के कोणों को ज्ञात कीजिए। कारण दीजिए।

8.4 समानान्तर चतुर्भुज और इसके गुणधर्म (Parallelogram and their properties)

हमने देखा है समानान्तर चतुर्भुज, चतुर्भुज होते हैं। नीचे हम समानान्तर चतुर्भुज के गुणों के बारे में जानेंगे।

इसे कीजिए :

एक कागज़ के टुकडे से समानान्तर चतुर्भुज काटिए और पुनः असके एक कर्ण के साथ काटिए। तुम्हें किस प्रकार के आकार प्राप्त हुए? इन त्रिभुजों के बारे में तुम क्या कहते हो?

एक त्रिभुज के ऊपर दूसरा त्रिभुज रखिए। क्या तुम प्रत्येक भुजा के ऊपर दूसरी भुजा ठीक तरह से रख सकते हैं? भुजाएँ समान करने के लिए तुम्हे त्रिभुज को घुमाना आवश्यक है। क्योंकि दो त्रिभुज यथार्थ रूप से समान है त्रिभुज एक दुसरे के सर्वसमान है।

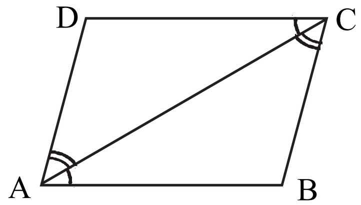
कुछ और समानान्तर चतुर्भुज के साथ यह कीजिए। काटने के लिए तुम किसी भी कर्ण का चयन कर सकते हैं।

हम देखते हैं कि समांतर चतुर्भुज का प्रसेक कर्ण इसे दो सर्वसमान त्रिभुज में विभाजित करता है।

अब हम यह परिणाम सिद्ध करेंगे।

प्रमेय-8.1 : समांतर चतुर्भुज का कर्ण इसे दो सर्वसमान त्रिभुजों में विभाजित करता है।

उपपत्ति : मान लीजिए ABCD समांतर चतुर्भुज है।



A और C मिलाईए। समांतर चतुर्भुज का कर्ण AC है।

चूँकि $AB \parallel DC$ और AC तिर्यक रेखा है,

$\angle DCA = \angle CAB$. (एकांतर अंतःकोण)

इसी तरह, $DA \parallel CB$ और AC तिर्यक रेखा है। इसलिए $\angle DAC = \angle BCA$.

ΔACD और ΔCAB में,

$\angle DCA = \angle CAB$ और $\angle DAC = \angle BCA$

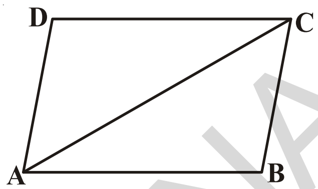
और $AC = CA$. (उभयनिष्ठ भुजा)

इसलिए $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

इसका अर्थ दो त्रिभुज कोण भुजा कोण ASA नियम द्वारा सर्वसमान होते हैं। अर्थात् कर्ण AC, समांतर चतुर्भुज को दो सर्वसमान त्रिभुज में विभाजित करता है।

प्रमेय-8.2 : समांतर चतुर्भुज में, सम्मुख भुजाएँ तथा सम्मुख कोण बराबर होती है।

उपपत्ति : पहले ही हमने सिद्ध किया है कि समांतर चतुर्भुज के कर्ण उसे दो सर्वसमान त्रिभुज में विभाजित करते हैं।



इस तरह आकृति में $\Delta ACD \cong \Delta CAB$

इसलिए $AB = DC$ और $\angle CBA = \angle ADC$

तथा $AD = BC$ और $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

अर्थात् $\angle DCB = \angle DAB$

इस तरह समान्तर चतुर्भुज में,

i. सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है।

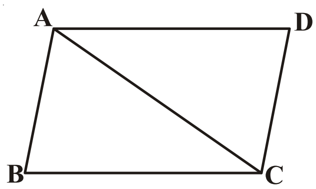
ii. सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

हमने सिध्द किया है कि उत्तल चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर है, हम बता सकते हैं कि सम्मुख भुजाएँ और सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

अब हम यह बताने का प्रयत्न करेंगे कि हम इसका विलोम सिद्ध कर सकते हैं। अर्थात् यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होगा।

प्रमेय-8.3 : यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म समान हो तो वह समांतर चतुर्भुज होगा।

उपपत्ति : ज्ञात है कि चतुर्भुज ABCD में $AB = DC$ और $BC = AD$.



कर्ण AC खींचिए।

ΔABC और ΔCDA में

$BC = AD$, $AB = DC$ और $AC = CA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$

इसलिए $\angle BCA = \angle DAC$ और AC तिर्यक रेखा है।

अथवा $AB \parallel DC$ ...(1)

यूँकि $\angle ACD = \angle CAB$ और CA तिर्यक रेखा है।

$\therefore BC \parallel AD$ (ज्ञात है) ...(2)

इसलिए, ABCD समांतर चतुर्भुज है,.... (1) और (2) द्वारा

अभी तुमने देखा कि समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म बराबर होते हैं और विलोमतः यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म बराबर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।

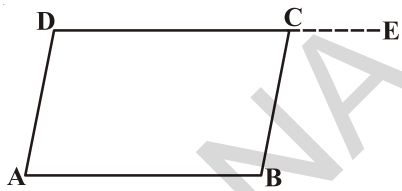
क्या हम इसी तथ्य को उन चतुर्भुजों के लिए बता सकते हैं जिनके सम्मुख कोणों के युग्म बराबर होते हैं?

प्रमेय-8.4 : किसी चतुर्भुज में, यदि सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होगा।

उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD में $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ तो सिद्ध करना है कि ABCD समान्तर चतुर्भुज है।

ज्ञात है कि $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360°}{2}$$



$\therefore \angle A + \angle B = 180°$

DC को E तक बढाईए

$\angle BCD + \angle BCE = 180°$ अतः $\angle BCE = \angle ADC$

यदि $\angle BCE = \angle ADC$ तब AD || BC (क्यों?)

DC छेदी रेखा है।

इसी तरह हम बता सकते हैं कि AB || DC अर्थात् ABCD समान्तर चतुर्भुज है।

अभ्यास - 8.2

1. संलग्न आकृति में ABCD समान्तर चतुर्भुज है। ABEF एक आयत है। वो बताईए कि $\Delta AFD \cong \Delta BEC$.

2. बताईए कि समचतुर्भुज के कर्ण, इसे चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करते हैं।
3. चतुर्भुज ABCD में, $\angle C$ का समद्विभाजक और $\angle D$ का समद्विभाजक O पर प्रतिच्छेदित होते है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

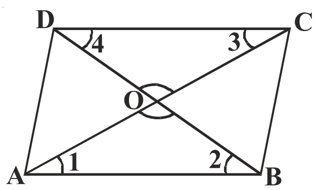
8.5 समान्तर चतुर्भुज के कर्ण (Diagonals of a Parallelogram)

प्रमेय-8.5 : समान्तर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

उपपत्ति : समान्तर चतुर्भुज ABCD बनाईए।

इसके दोनों कर्ण AC और BD खींचिए जो बिन्दु 'O' पर मिलते हैं। एक दुसरे को प्रतिच्छेदित करते है।

ΔOAB और ΔOCD में



बने हुए कोणों को $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ से चिन्हित कीजिए।

$\angle 1 = \angle 3$ (AB || CD और AC तिर्यक छेदी रेखा है।)

$\angle 2 = \angle 4$ (क्यों?) (एकान्तर अंतःकोण)

और $AB = CD$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें)

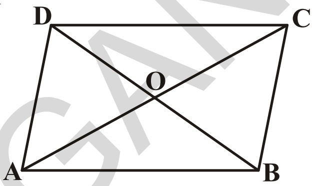
$\therefore$ कोण भुजा कोण ASA नियम द्वारा

$\Delta OCD \cong \Delta OAB$

$\therefore$ CO= OA, DO = OB अथवा कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अतः हमें जाँच करना चाहिए कि क्या इसका विलोम भी सही होगाव इसका विलोम है : यदि किसी चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह समान्तर चतुर्भुज होगा।

प्रमेय-8.6 : यदि किसी चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।



उपपत्ति : ABCD चतुर्भुज है।

AC और BD कर्ण है जो 'O' पर प्रतिच्छेदित होते है

इसलिए OA = OC और OB = OD.

सिद्ध कीजिए कि ABCD समानान्तर चतुर्भुज है।

(**संकेत** : ΔAOB और ΔCOD को ध्यानपूर्वक देखिए। क्या ये सर्वांगसम त्रिभुज है? यदि है तब ABCD समानता चर्तुभुज कैसे हो सकते है।)

8.5.1 कुछ और ज्यामितीय कथन

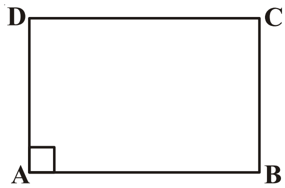
पूर्व उदाहरणों में हमने बताया है कि कुछ सामान्य परिसरों द्वारा आरंभ करते हुए हम हमने कई कथनों को ज्ञात किया जिससे हम विशेष आकृति (समांतर चतुर्भुज) के बारे में बता सकते हैं। हम नये कथन व्यूत्पन्न करने के लिए पूर्व परिणामों का उपयोग करते हैं। ध्यान दीजिए कि इन कथनों को नापों द्वारा जाँच करना आवश्यक नहीं है क्यों कि यह कथन, सभी स्थितियों में सही सिध्द किए गए है।

ऐसे कथन जो पूर्व सिद्ध किए हुए प्रमेयो द्वारा व्युत्पन्न किया जाते हैं, उन्हें उपप्रमेय कहा जाता है। उपप्रमेय वह कथन है जिसकी सत्यता किसी स्थापित प्रमेय द्वारा आसानी से सिद्ध होती है।

उपप्रमेय-1 : बताईए कि आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।

हल : आयत, एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें एक कोण समकोण है।

दिया गया है : ABCD आयत है। माना कि एक कोण $\angle A = 90^o$



हमें बताना है कि $\angle B = \angle C = \angle D = 90^o$

उपपत्ति : यूँकि ABCD समांतर चतुर्भुज है,

AD || BC और AB तिर्यक रेखा है।

इसलिए $\angle A + \angle B = 180^o$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोण)

$\angle A = 90^o$ (दिया है)

$\therefore \angle B = 180^o - \angle A$

$= 180^o - 90^o = 90^o$

अब $\angle C = \angle A$ और $\angle D = \angle B$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए $\angle C = 90^o$ और $\angle D = 90^o$.

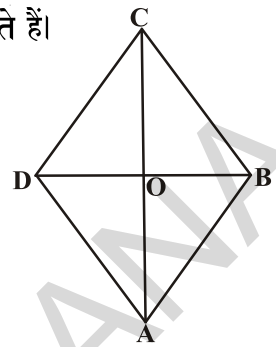
इसलिए आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।

उपप्रमेय-2 : बताईए कि समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे पर लम्ब रहते हैं।

उपपत्ति : समचतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज रहता है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती है।

ABCD समचतुर्भुज है। कर्ण AC और BD आपस में O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

हम बताना चाहते हैं कि AC रेखा BD पर लम्ब है।



ΔAOB और ΔBOC में,

$OA = OC$ (समांतर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।)

$OB = OB$ (ΔAOB और ΔBOC की उभयनिष्ठ भुजा)

$AB = BC$ (समचतुर्भुज की भुजाएँ)

इसलिए $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (भुजा भुजा भुजा (S.S.S.) नियम)

अतः $\angle AOB = \angle BOC$

परन्तु $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ (रैखिक युग्म कोण)

इसलिए $2\angle AOB = 180^\circ$

अथवा $\angle AOB = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

इसी प्रकार से $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$ (वही कोण)

अतः रेखा AC, रेखा BD पर लंब रहती है।

इसलिए, समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे पर लम्ब रहते हैं।

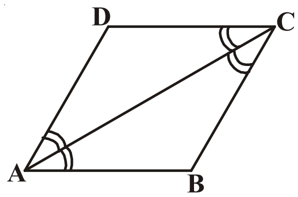
उपप्रमेय-3 : समान्तर चतुर्भुज ABCD में, यदि कर्ण AC, कोण A को समद्विभाजित करता हो तो वह समचतुर्भुज होगा।

उपपत्ति : ABCD समान्तर चतुर्भुज है।

इसलिए AB || DC. तिर्यक रेखा AC कोण $\angle A$ और कोण $\angle C$ को प्रतिच्छेदित करती है।

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$ (अंतः एकान्तर कोण) ...(1)

और $\angle BCA = \angle DAC$ ...(2)



परन्तु दिया है कि AC, कोण $\angle A$ को समद्विभाजित करती है।

इसलिए $\angle BAC = \angle DAC$

$\therefore \angle DCA = \angle DAC$ ...(3)

इस तरह AC, कोण $\angle C$ को भी समद्विभाजित करती है।

(1), (2), (3) से हमें ज्ञात होगा,

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABC में, $\angle BAC = \angle BCA$ का अर्थ है कि $BC = AB$ (समद्विबाहु त्रिभुज)

परन्तु $AB = DC$ और $BC = AD$ (समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore \; AB = BC = CD = DA$

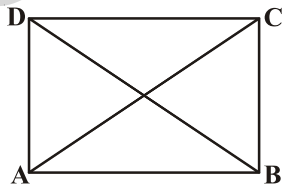
अतः, ABCD समचतुर्भुज है।

उपप्रमेय-4 : बताईए कि आयत के कर्ण समान लम्बाई के होते हैं।

उपपत्ति : ABCD आयत है और AC और BD इसके कर्ण है।

हमें सिद्ध करना है, $AC = BD$

ABCD आयत है, इसका अर्थ है कि ABCD समांतर चतुर्भुज है जिसका प्रत्येक कोण समकोण के बराबर है।



ΔABC और ΔBAD में,

$AB = BA$ (उभयनिष्ठ)

$\angle B = \angle A = 90^o$ (आयत का प्रत्येक कोण)

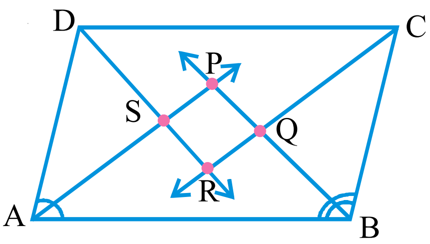
$BC = AD$ (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (भुजा कोण भुजा नियम)

इसका तात्पर्य है कि $AC = BD$

अर्थात् आयत के कर्ण बराबर होते हैं।

उपप्रमेय-5 : बताईए कि समांतर चतुर्भुज के कोण समद्विभाजक, एक आयत बनाते हैं।



उपपत्ति : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ के कोण समद्विभाजक P, Q, R, S पर प्रतिच्छेद करते हैं जिससे एक चतुर्भुज बनता है। (संलग्न आकृति देखिए)

यूँकि ABCD समांतर चतुर्भुज है, $AD \parallel BC$ और AB तिर्यक छेदी रेखा है तब $\angle DAB + \angle ABC = 180^o$ (समांतर चतुर्भुज के क्रमिक कोण)

हम जानते हैं $\angle BAP = \frac{1}{2} \angle BAD$ और $\angle ABP = \frac{1}{2} \angle ABC$ [क्यों कि $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक क्रमशः AP और BP है।]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \times 180^o$$

अथवा $\angle BAP + \angle ABP = 90^o \quad ...(1)$

परन्तु ΔAPB में,

$$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^\circ \text{ (त्रिभुज का कोण-योग गुण)}$$

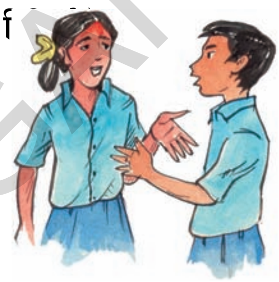
इसलिए $\angle APB = 180^\circ - (\angle BAP + \angle ABP)$

$\Rightarrow \angle APB = 180^\circ - 90^\circ$ ((1) से)

$= 90^\circ$

हम देख सकते हैं कि $\angle SPQ = \angle APB = 90^\circ$

इसी प्रकार, हम बता सकते हैं कि $\angle CRD = \angle QRS = 90^\circ$ (उपरोक्त



परन्तु $\angle BQC = \angle PQR$ और $\angle DSA = \angle PSR$ (क्यों?)

$\therefore \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90^\circ$

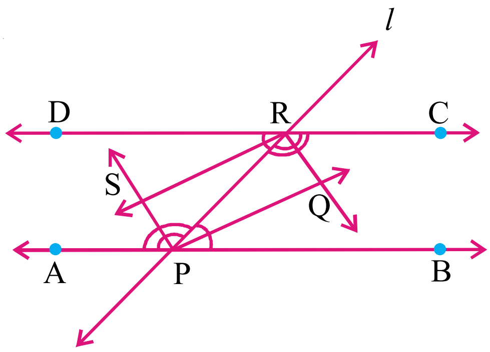
अतः PQRS के सभी चार कोण 90° के बराबर हैं।

इसलिए हम कह सकते हैं कि PQRS आयत है।

विचार विमर्श कीजिए और लिखिए :

1. बताईए कि वर्ग के कर्ण समान और एक दूसरे को **समकोण पर** समद्विभाजित करते हैं।
2. बताईए कि समचतुर्भुज के कर्ण, उसे चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करते हैं।

कुछ व्याख्यात्मक उदाहरण :



उदाहरण-5. $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{DC}$ दो समानांतर रेखाएँ और तिर्यक रेखा l, $\overleftrightarrow{AB}$ को P पर और $\overleftrightarrow{DC}$ को R पर प्रतिच्छेदित करती है। सिद्ध कीजिए कि अंतःकोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

उपपत्ति : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, तिर्यक रेखा l, $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{DC}$ को क्रमशः P और R पर प्रतिच्छेदित करती है।

माना कि $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{RS}$ और $\overrightarrow{PS}$ क्रमशः $\angle RPB$, $\angle CRP$, $\angle DRP$ और $\angle APR$ के समद्विभाजक हैं।

$\angle BPR = \angle DRP$ (एकांतर अंतः कोण) ...(1)

परन्तु $\angle RPQ = \frac{1}{2}\angle BPR$ ($\angle BPR$ का समद्विभाजक $\overrightarrow{PQ}$ है।)

इसी तरह $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle DRP$ ($\angle DPR$ का समद्विभाजक $\overrightarrow{RS}$ है।) ...(2)

(1) और (2) से

$\angle RPQ = \angle PRS$

रेखाएँ $\overrightarrow{PQ}$ और $\overrightarrow{RS}$ के साथ $\overline{PR}$ द्वारा बने हुए ये एकांतर अन्तःकोण है।

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$

इसी तरह

$\angle PRQ = \angle RPS$, अतः $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{RQ}$

इसलिए PQRS समांतर चतुर्भुज है। ... (3)

हमें ज्ञात है $\angle BPR + \angle CRP = 180^\circ$ ($\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ और तिर्यक छेदी रेखा l के एक ही और के अतःकोण)

$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^\circ$

परन्तु Δ PQR में,

$\angle RPQ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^\circ$ (त्रिभुज के तीन कोण)

$\angle PQR = 180^\circ - (\angle RPQ + \angle PRQ)$

$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ... (4)

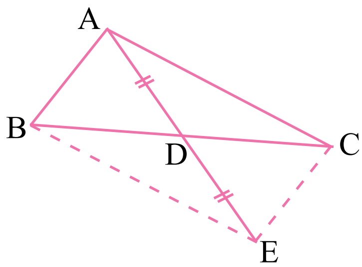
(3) और (4) से

PQRS समांतर चतुर्भुज है जिसका एक कोण समकोण है।

अतः PQRS आयत है।

उदाहरण-6. त्रिभुज ABC में, भुजा BC पर खींची गई माध्यिका AD है जो E तक इस प्रकार बढाई गई है कि AD = ED. सिद्ध कीजिए कि ABEC समांतर चतुर्भुज रहता है।

उपपत्ति : Δ ABC की माध्यिका AD है।



AB को E तक इस प्रकार बढाए कि AD = ED

BE और CE मिलाए।

अब Δ^s ABD और ECD में,

BD = DC (BC का मध्य बिन्दु D है)

$\angle ADB = \angle EDC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

AD = ED (दिया है।)

इसलिए $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (भुजा कोण भुजा नियम)

इसलिए, AB = CE (सर्वसमान त्रिभुजों के मेल खाने वाले भाग (CPCT))

इसी तरह $\angle ABD = \angle ECD$

रेखाएँ $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CE}$ रेखाओं के साथ तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{BC}$ द्वारा बने हुए ये एकांतर अन्तःकोण है।

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

इस प्रकार, चतुर्भुज ABEC में,

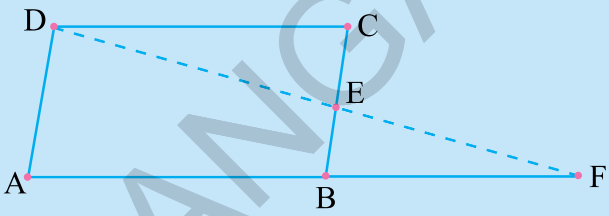
AB || CE और AB = CE

अतः ABEC समांतर चतुर्भुज है।

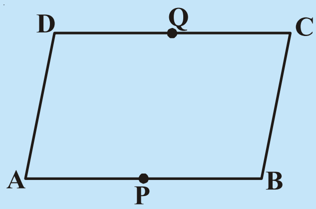
अभ्यास - 8.3

1. समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण $(3x - 2)^{o}$ और $(x + 48)^{o}$ है। समांतर चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

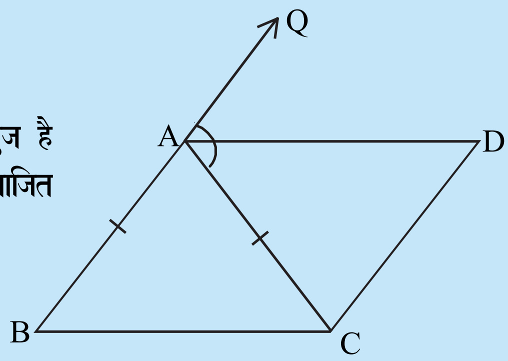
2. समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए यदि इसका एक कोण, न्यूनतम कोण के दुगुने से 24^{o} कम है।



3. संलग्न आकृति में ABCD, एक समांतर चतुर्भुज है और भुजा BC का मध्यबिन्दु E है। यदि DE और AB, बिन्दु F पर मिलने तक बढाए तो बताईए कि AF = 2AB.



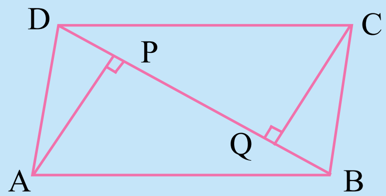
4. संलग्न आकृति में ABCD समांतर चतुर्भुज है। भुजाएँ AB और DC के मध्यबिन्दु क्रमशः P और Q है। बताईए कि PBCQ भी समांतर चतुर्भुज होगा।



5. आकृति के अनुसार ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC, बाह्यकोण QAC को AD समद्विभाजित करता है और CD || BA तो बताईए कि

   (i) $\angle DAC = \angle BCA$

   (ii) ABCD समान्तर चतुर्भुज है।

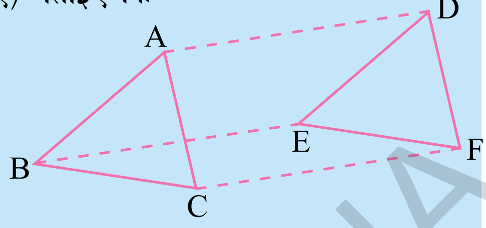


6. ABCD समान्तर चतुर्भुज है। कर्ण BD पर शीर्ष A और C से AP और CQ लंब खींचे। (आकृति देखिए) बताईए कि

   (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

   (ii) AP = CQ

7. Δ^s ABC और DEF में AB = DE; BC = EF और BC || EF; शीर्ष A, B और C क्रमशः D, E और F शीर्षों के साथ मिलाया गया है तो। (आकृति देखिए) बताईए कि



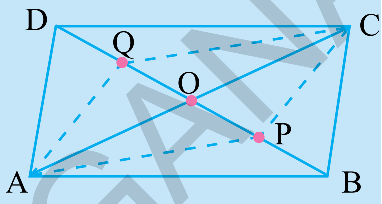
(i) ABED समांतर चतुर्भुज है।

(ii) BCFE समांतर चतुर्भुज है।

(iii) AC = DF

(iv) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

8. ABCD समांतर चतुर्भुज है। कर्ण AC और BD आपस में O पर प्रतिच्छेद करते हैं। कर्ण BD को समत्रिभाग में विभाजित करनेवाले बिन्दु P और Q है। सिद्ध कीजिए कि CQ || AP और AC, रेखा PQ को समद्विभाजित करती है। (आकृति देखिए)



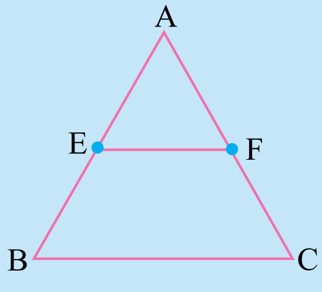
9. ABCD वर्ग है। AB, BC, CD और DA के मध्यबिन्दु क्रमशः E, F, G और H है। AE = BF = CG = DH तो सिद्ध कीजिए EFGH वर्ग है।

8.6 त्रिभुज का मध्यबिन्दु प्रमेय

हमने त्रिभुज और चतुर्भुज के गुणधर्मों को सिखा है। त्रिभुज के भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को ध्यानपूर्वक देखिए और इनसे हम क्या व्युत्पन्न कर सकते हैं, प्रयत्न कीजिए।

यह क्रिया कलाप कीजिए :

एक त्रिभुज ABC बनाईए और इसकी दो भुजाएँ $\overline{AB}$ और $\overline{AC}$ के मध्यबिन्दुओं को क्रमशः E और F से चिन्हित कीजिए। आकृति में दिखाए जैसे बिन्दु E और F मिलाइए।



त्रिभुज की तिसरी भुजा और EF मापिए। इसी तरह $\angle AEF$ और $\angle ABC$ मापिए।

हम जानते हैं कि $\angle AEF = \angle ABC$ और $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$

चूँकि रेखाएँ EF और BC के साथ तिर्यक रेखा AB द्वारा बने हुए ये संगत कोण है, हम कहते हैं कि EF || BC.

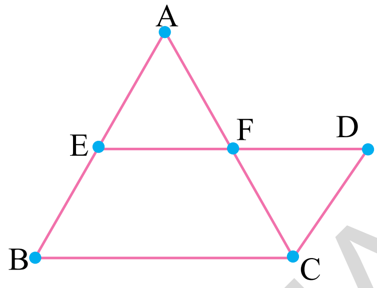
यह क्रियाकलाप कुछ और त्रिभुजों के लिए कीजिए।

इस प्रकार हम निम्न प्रमेय के निष्कर्ष पर आते हैं।

प्रमेय-8.7 : किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को मिलानेवाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर और उसका आधी होती है।

दिया है : ΔABC में AB और AC के मध्यबिन्दु क्रमशः E और F है।

हमें सिद्ध करना है : (i) $EF \parallel BC$ (ii) $EF = \frac{1}{2}BC$



रचना :- EF मिलाए और D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि C से BA को खींची गई समानांतर रेखा इसे स्पर्श करें

Δ^s AEF और ΔCDF में

AF = CF (AC का मध्यबिन्दु F है।)

$\angle AFE = \angle CFD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

तथा $\angle AEF = \angle CDF$ ($CD \parallel BA$ और तिर्यक रेखा ED से बने एकांतर अंतःकोण)

कोण भुजा कोण (A.S.A) सर्वांगसमता नियम द्वारा

$\therefore\ \Delta\ AEF \cong \Delta CDF$

इस तरह AE = CD और EF = DF (सर्वांगसम त्रिभुजों के मेल खानेवाले भाग (CPCT))

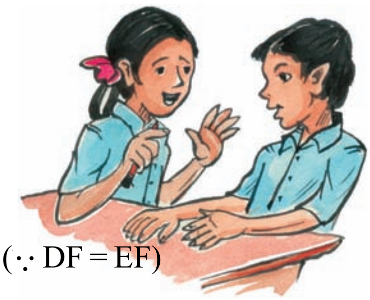
हम जानते हैं AE = BE

इसलिए BE = CD

चूँकि $BE \parallel CD$ और BE = CD, BCDE समानान्तर चतुर्भुज है।

इसलिए $ED \parallel BC$

$\Rightarrow EF \parallel BC$



इस तरह BCDE समांतर चतुर्भुज है, ED = BC (क्यों?) ($\because$ DF = EF)

परन्तू हमने बताया है, FD = EF

$\therefore\ 2EF = BC$

अतः $EF = \frac{1}{2}BC$

हम देख सकते हैं कि इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है। प्रथम इसकी व्याख्या करते हैं तत्पश्चात इसे कैसे सिद्ध करते हैं, देखेंगे।

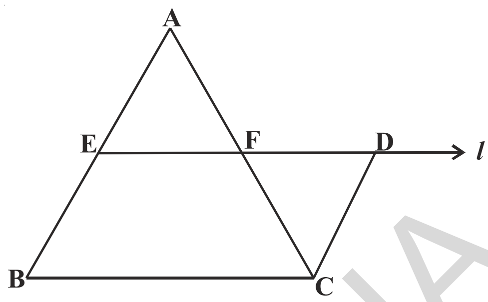
प्रमेय-8.8 : किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्यबिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समानांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा के मध्यबिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती है।

उपपत्ति : ΔABC बनाईए। भुजा AB के मध्यबिन्दु को 'E' से चिन्हित कीजिए। E से गुजरनेवाली और BC के समानान्तर रेखा l खींचिए। रेखा AC को F पर प्रतिच्छेदित करती है।

$CD \parallel BA$ की रचना कीजिए।

हमें बताना है कि AF = CF

ΔAEF और ΔCFD को ध्यानपूर्वक देखिए :



$\angle EAF = \angle DCF$ ($BA \parallel CD$ और AC तिर्यक छेदी रेखा है।) (कैसे?)

$\angle AEF = \angle D$ ($BA \parallel CD$ और ED तिर्यक छेदी रेखा है।) (कैसे?)

हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता सिद्ध नही कर सकते क्यों कि दोनों त्रिभुजों में भुजाओं का कोई भी युग्म बराबर नही बताया गया?

यह बताने के लिए मान लीजिए $EB \parallel DC$

और $ED \parallel BC$

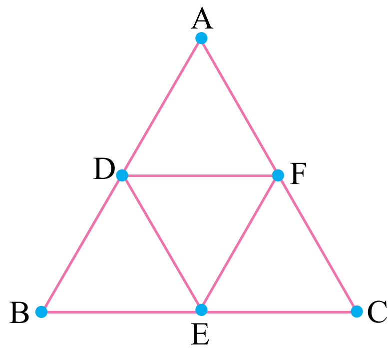
इस तरह EDCB समांतर चतुर्भुज हुआ और हमें पता है, $BE = DC$.

यूँकि $BE = AE$ इसलिए $AE = DC$.

अतः $\Delta AEF \cong \Delta CFD$

$\therefore AF = CF$

कुछ और उदाहरण :



उदाहरण-7. ΔABC की भुजाओं AB, BC और CA के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F हैं। बताईए कि ΔABC चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित होता है, जब तीनों मध्यबिन्दु एक दूसरे के साथ जोड़ा जाता है। (ΔDEF मध्यवर्ती त्रिभुज कहलाता है।)

उपपत्ति : ΔABC की भुजाएँ $\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ के मध्यबिन्दु क्रमशः D और E है।

इसलिए मध्यबिन्दु प्रमेय से,

$DE \parallel AC$

इसी प्रकार $DF \parallel BC$ और $EF \parallel AB$.

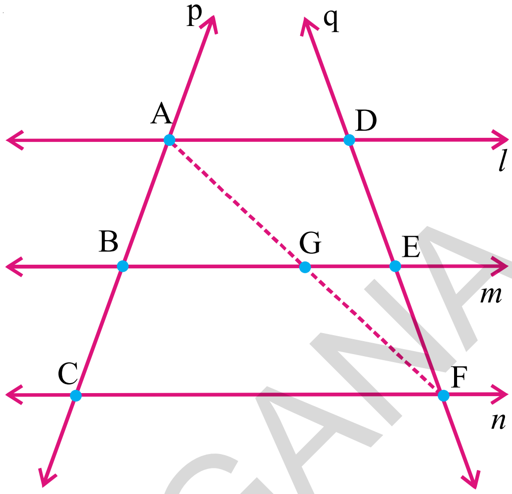
इसलिए ADEF, BEFD, CFDE सभी समांतर चतुर्भुज है।

समांतर चतुर्भुज ADEF में DF कर्ण है।

$\therefore \Delta ADF \cong \Delta DEF$ (कर्ण, समांतर चतुर्भुज को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।)

इसी प्रकार $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

और $\Delta CEF \cong \Delta DEF$



इसलिए, सभी चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

हमने सिद्ध किया कि त्रिभुज ABC के भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को जोड़ने से, वह चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित होता है।

उदाहरण-8. l, m, n तीन समानान्तर रेखाएँ जिन्हें तिर्यक छेदी रेखाएँ p और q क्रमशः A, B, C और D,E, F पर इस प्रकार काटती है कि उनके द्वारा तिर्यक छेदी रेखा p पर काटे गये अन्तःखण्ड AB और BC बराबर है। बताईए कि q पर काटे गये अन्तःखण्ड DE और EF भी बराबर होंगे।

उपपत्ति : हमें AB और BC की समता को दर्शाना हैं जो DE और EF की तुलना के लिए आवश्यक है। हम A से F तक जोड़ते हैं और 'm' पर स्थित प्रतिच्छेद बिन्दु को 'G' से चिन्हित करते है।

ΔACF में, $AB = BC$ (दिया है।)

इसलिए AC का मध्यबिन्दु B है।

और $BG \parallel CF$ (कैसे?)

इसलिए AF का मध्यबिन्दु G है। (त्रिभुज के मध्यबिन्धु प्रमेय से)

अब Δ AFD में, भी इसी तथ्य का उपयोग करते हैं क्यों कि AF का मध्यबिन्दु G है और $GE \parallel AD$, DF का मध्यबिन्दु E है।

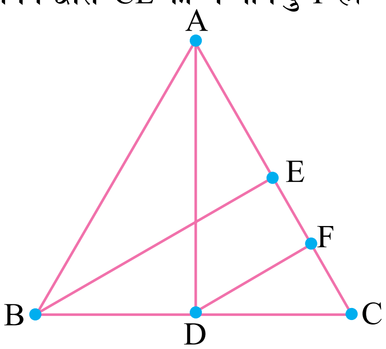
इस तरह $DE = EF$.

अतः q पर भी l, m, n द्वारा काटे गए अन्तः खण्ड बराबर होते हैं।

उदाहरण-9. आकृति में, ΔABC की माध्यिकाएँ AD और BE है और $BE \parallel DF$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$CF = \frac{1}{4} AC.$$

उपपत्ति : यदि Δ ABC में BC का मध्यबिन्दु D है और $BE \parallel DF$; प्रमेय द्वारा CE का मध्यबिन्दु F है।



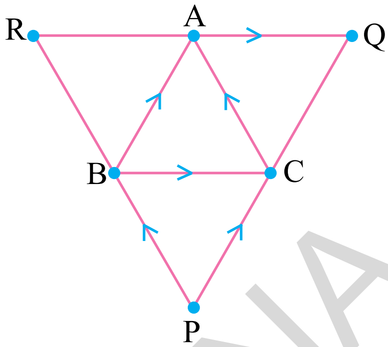
$$\therefore CF = \frac{1}{2} CE$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} AC\right) \text{ (कैसे?)}$$

अतः $CF = \frac{1}{4} AC$.

उदाहरण-10. ABC एक त्रिभुज है और बिन्दु A, B, C से क्रमशः BC, CA और AB को समानान्तर रेखाएँ खींची जो P, Q और R पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔPQR का परिमाप ΔABC के परिमाप से दुगुना होगा।

उपपत्ति : AB || QP और BC || RQ इसलिए ABCQ समांतर चतुर्भुज है।



इसी प्रकार BCAR, ABPC समांतर चतुर्भुज हैं।

$\therefore$ BC = AQ और BC = RA

$\Rightarrow$ QR का मध्यबिन्दु A है।

इसी प्रकार PR और PQ के मध्यबिन्धु क्रमशः B और C है।

$\therefore AB = \frac{1}{2}PQ;\quad BC = \frac{1}{2}QR$ और $CA = \frac{1}{2}PR$ (कैसे?)

(संबंधित प्रमेय का कथन कीजिए)

अब ΔPQR का परिमाप $= PQ + QR + PR$

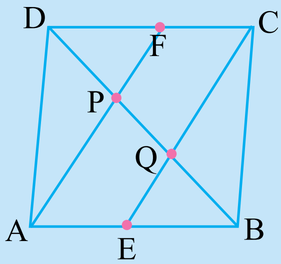
$= 2AB + 2BC + 2CA$

$= 2(AB + BC + CA)$

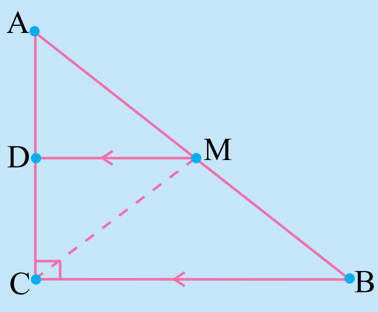
$= 2$ (ΔABC का परिमाप).

अभ्यास - 8.4

1. ABC त्रिभुज है। AB पर D बिन्दु इस प्रकार है कि $AD = \frac{1}{4}AB$ और AC पर E बिन्दु इस प्रकार है कि
   $AE = \frac{1}{4}AC$. यदि DE = 2 से.मी. तो BC ज्ञात कीजिए।
2. ABCD चतुर्भुज है। AB, BC, CD और DA के मध्यबिन्दु क्रमशः E, F, G और H हैं। सिद्ध कीजिए कि EFGH एक समांतर चतुर्भुज है।
3. बताईए कि समचतुर्भुज के भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को जोड़ने पर बनाने वाली आकृति एक आयत होती है।
4. समांतर चतुर्भुज ABCD में, भुजाएँ AB और DC के मध्यबिन्दु क्रमशः E और F है। बताईए कि रेखाखण्ड AF और EC, कर्ण BD को समत्रि भागों में विभाजित करती है।



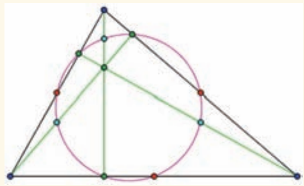
5. बताईए कि चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को जोड़ने वाले रेखाखण्ड एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
6. त्रिभुज ABC में C पर समकोण है। कर्ण AB का मध्यबिन्दु M से गुजरनेवाली रेखा जो BC को समानांतर है, AC को D पर प्रतिच्छेदित करती है। बताईए कि
   (i) AC का मध्यबिन्दु D है।
   (ii) $MD \perp AC$
   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$.



हमने क्या सीखा?

1. एक चतुर्भुज, किसी समतल में चार रेखाओं द्वारा बनी हुई सरल बंद आकृति है।
2. चतुर्भुज में चारों कोणों का योग 360^0 अथवा 4 समकोण होता है।
3. समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत, वर्ग, तथा पतंगाकृति में चतुर्भुज के विशिष्ट प्रकार हैं।
4. समांतर चतुर्भुज यह चतुर्भुज का विशेष प्रकार है जिसके कई गुणधर्म है। हमने निम्न प्रमेयों को सिद्ध किया है।
   a) समांतर चतुर्भुज का कर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
   b) समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ और कोण बराबर होते हैं।
   c) यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ और कोण बराबर होते हैं।
   d) यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।
   e) समांतर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
   f) यदि किसी चतुर्भुज के कर्ण आपस में समद्विभाजित करते हैं तब वह समांतर चतुर्भुज होता है।
5. त्रिभुज का मध्यबिन्दु प्रमेय तथा उसका विलोमः
   a) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समानान्तर उसकी आधी होती है।
   b) किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्यबिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समानान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा के समद्विभाजित करती है।

नौ बिन्दु वृत्त



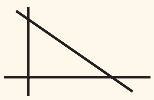
किसी त्रिभुज में, भुजाओं के मध्यबिन्दु, उँचाईयों के आधार और लम्ब केन्द्र से शीर्षों तक रेखाखण्डों के मध्यबिन्दु वृत्त पर स्थित होते हैं। कुल कितने बिन्दु, वृत्त पर स्थित हैं? इसे नौ बिन्दु वृत्त कहते हैं।

यह नौ बिन्दु वृत्त परिणाम, 1765 में लिओहार्ड आयलर (Leonhard Euler) को ज्ञात हुआ था। परन्तु 1822 में जर्मन गणितज्ञ कार्ल फिअरबॅच (Karl Feuerbach) द्वारा पुनःशोध किया गया।

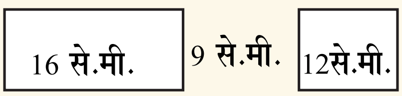
बुद्धि का खेल

त्रिभुजों की पहेली का निर्माण :

1. दिये गये चित्र में दो सरल रेखाओं को जोड़कर दस त्रिभुजों का निर्माण कीजिए ।



2. 16 से.मी. लम्बाई और 9 से.मी. चौडाई वाले एक कागमज के टुकडे को लेकर उसको दो समान भागों में काटकर, उन्हें वर्गाकार रूप में जोडिए ।



09

सांख्यिकी
(STATISTICS)

9.1 परिचय

एक दिन सोमू अपने गणित के अध्यापक को मिलने उनके घर गया। उस समय उसके अध्यापक जन गणना के कार्य में व्यस्त थे जो उन्होंने हाल ही में भारतीय जनसंख्या के जन गणना के कार्यक्रम के तहत उनके वार्ड से सूचनाएँ संग्रहीत की थी।

सोमू : नमस्ते सर, ऐसा लगता है कि आप कुछ काम में व्यस्त हैं। क्या मैं आपके कार्य में मदद कर सकता हूँ?

अध्यापक : सोमू, मैंने गृहवासी जन गणना के बारे में जानकारी संग्रहीत की है। जैसे परिवार में व्यक्तियों की संख्या, उनकी आयु, परिवार की आय, किस प्रकार के घर में वे रहते हैं। कुछ और जानकारी।

सोमू : सर इन सभी जानकारी का क्या उपयोग हैं?

अध्यापक : इन सभी जानकारीयों से सरकार को अभिवृद्धि कार्यक्रम और संसाधनों के आबंटन में मदत मिलती हैं।

सोमू : सरकार किस तरह इस जानकारी का उपयोग करती है?

अध्यापक : जन गणना विभाग इस व्यापक जानकारी को संकलित कर इनका उपयोग आवश्यक प्रबन्धन दत्तांशों का निर्वाचन तथा विश्लेषण सूचनाओं से कर इन में परिणाम निकालते हैं। सोमू, आपने पिछली कक्षाओं में सांख्यिकी के आधार भूत मूल्यों को सीखा ही होगा?

हम भी कई परिस्थितियों का सामना करते हैं। जैसे जानकारी के आधार भूत मूल्यों का क्रमागत संग्रह, तालिका, आलेख आदि, इनका संबंध सब्जियों के मूल्यों, शहर का तापमान, क्रिकेट स्कोर, मतदान का परिणाम आदि से होता है। तथ्यों पर आधारित जो संख्यात्मक या अन्य स्पष्ट प्रयोजन के **'आंकड़ों'** को दतांश कहते हैं। दत्तों से प्रयोजन प्राप्त करने की प्रक्रिया को गणित की शाखा में **'सांख्यिकी'** कहा जाता है।

अब पिछली कक्षा में सांख्यिकी के बारे में क्या पढ़ा गया उसे दोहराएँगे।

9.2 दत्तों का संकलन (Grouping Data)

सांख्यिकी की प्रारंभिक जानकारी दत्तों को संग्रह करना। इसे समझने के लिए सबसे पहले हम निम्न लिखित क्रिया कलाप करके दत्तों के एकत्रित करने का कार्य आरंभ (प्रारंभ) करेंगे।

क्रिया कलाप

आपकी कक्षा के विद्यार्थीयों को चार समूह में बाँटो। प्रत्येक समूह को निम्न को संग्रहीत करने के लिए करेंगे।

i. सभी छात्रों का भार।

ii. प्रत्येक विद्यार्थी के भाई-बहनों की जानकारी

iii. पिछले माह में प्रतिदिन के अनुपस्थित विद्यार्थीयों की संख्या

iv. सभी विद्यार्थीयों के घर से स्कूल की दूरी।

आपेक्षित सूचनाओं को विद्यार्थीयों ने किस प्रकार प्राप्त किया इस विषय पर चर्चा करेंगे।

1. क्या आपने प्रत्येक विद्यार्थी के घर जाकर या प्रत्येक विद्यार्थी से व्यक्तिगत पूछताछ से सूचना एकत्रित कि है?

2. क्या उन्होंने इन सूचनाओं को स्कूल के रिकार्ड से प्राप्त किया?

पहली स्थिति में सूचना संग्रह किसी निश्चीत उद्देश्य से की गई है। उन्हें **प्राथमिक दत्त** कहते हैं। (जैसे कि स्थिति (i), (ii), (iv)में)

ऊपर (ii) दिए गए स्थिति में अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या को केवल कक्षा के हाजिरी रजिस्टर से ही प्राप्त किया जा सकता है।इसलिए उन्हें **द्वितीयक दत्त** कहते हैं।

इसे हल कीजिए

निम्न में कौनसे प्राथमिक दत्त और द्वितीय दत्त हैं?

i. वर्ष 2001 से 2010 में आपके विद्यालय में विद्यार्थीयों के दर्ज हुए नामों की जानकारी प्राप्त कीजिए।

ii. P.T.अध्यापक के द्वारा आपके कक्षा के विद्यार्थीयों की रिकार्ड की गई ऊँचाईयाँ।

9.3 दत्तों का प्रदर्शन (Presentation of Data)

एकत्रित किये हुए दत्तों को प्रदर्शित करने के बारे में सोचना चाहिए। जिससे एक ही नजर में उसका अर्थ समझ सकें। अब हम कुछ ऐसी स्थितियों का अवलोकन करेंगे जहाँ दत्तों का प्रदर्शन आवश्यक है। 15 विद्यार्थियों द्वारा गणित में 50 में से प्राप्त अंक कुछ इस प्रकार है।

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7.

इस प्रकार के दत्तों को मूल दत्त कहते हैं।

दिए गए दत्तों से आप आसानी से न्यूनतम और अधिकतम अंक प्राप्त कर सकते है। आप जानते हैं कि न्यूनतम और अधिकतम अंकों के अंतर को व्याप्ति (Range) कहते हैं।

यहाँ पर न्यूनतम और अधिकतम अंक 7 और 50 है।

अतः व्याप्ति (परिसर) $= 50 - 7 = 43$,

ऊपर दिए गए दत्तों के अनुसार दत्त 7 से 50 के मध्य है।

ऊपर दिए गए दत्तों के अनुसार निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

i. दिए गए दत्तों का मध्य मूल्य ज्ञात करो।

ii. कितने विद्यार्थीयों को 60% या उससे अधिक अंक प्राप्त हुए है।

चर्चा

(i) इकरम के अनुसार दत्तों का मध्य मूल्य 25 है क्यों कि 50 अंकों की परिक्षा ली गई है। तुम क्या कहोगे?

मेरी ने कहा कि यह दत्तों का मध्य मूल्य नहीं है। यदि 15 विद्यार्थीयों के अंकों को उन्हें आरोही क्रम में लिखने पर, कुछ इस प्रकार प्राप्त होंगे।

7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

हम कह सकते कि 8 वाँ पद मध्य पद होगा जो 34 है।

(ii) आपको मालूम है कि 50 अंकों का 60% किस प्रकार मालूम किया जाता (i.e. $\frac{60}{100} \times 50 = 30$).

9 विद्यार्थीयों को 60% या उससे अधिक मिले है। (30 या 30 से अधिक ज्यादा)

जब दत्तों की संख्या बहुत अधिक हो तो, दिए गए दत्तों का आरोही या अवरोही क्रम में लिखना कुछ मुश्किल हो जाता है अतः हमें किसी और विधि के बारे में सोंचेंगे।

दिये गये उदाहरण को देखिए

उदाहरण-1. 50 विद्यार्थीयों के गणित विषय के एक परिक्षा में 10 में से प्राप्तांक इस प्रकार है।

5, 8, 6, 4, 2,	5, 4, 9, 10, 2,	1, 1, 3, 4, 5,
8, 6, 7, 10, 2,	1, 1, 3, 4,4,	5, 8, 6, 7, 10,
2,8, 6, 4, 2,	5, 4, 9, 10, 2,	1, 1, 3, 4, 5,
8, 6,4, 5, 8		

प्राप्तांक	गणना चिह्न	विद्यार्थीयों की संख्या
1	𝍸 I	6
2	𝍸 I	6
3	III	3
4	𝍸 IIII	9
5	𝍸 II	7
6	𝍸	5
7	II	2
8	𝍸 I	6
9	II	2
10	IIII	4
	कुल	50

तालिका में दर्शाये अनुसार दत्तों को गणना चिन्हों के उपयोग से, अंकित किया जा सकता है।

याद कीजिए कि विद्यार्थी जिन्होंने कुछ अंक प्राप्त किए है उनकी संख्या को प्राप्तांको की बारंबारिता कहते है। उदाहरण के लिए, 4 अंक प्रत्येक, 9 विद्यार्थीयों को 4 अंक मिले, अतः 4 अंको की बारंबारिता 9 है।

यहाँ सारणी में, मूलदत्तों को सारणी बद्ध लिखने में गणना चिन्हें का उपयोग होता है।

तालिका में सभी बारंबारिताओं का योग कुल दत्तों की संख्या को दर्शाता है। सभी दत्तों को तालिका में उनकी बारंबारिता के रूप में दर्शाया जाय तो इस तालिका को **असमुहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका** या **निरिक्षणों के भार की तालिका कहते हैं।**

क्रिया कलाप

आपके कक्षा के विद्यार्थीयों के नाम के पहले अक्षर की बारंबारिता बंटन तालिका बनाओ और निम्न प्रश्नों के उत्तर दो।

(i) आपके सहपाठीयों के नागों में कौनसे पहले अक्षर का उपयोग सबसे ज्यादा हुआ।

(ii) आपके कितने सहपाठीयों के नाम 'I' से शुरु होते है।

(iii) आपके सहपाठीयों के नामों में सबसे कम किस अक्षर का उपयोग हुआ है?

कुछ आवश्यक कारणों की वजह से हमें दत्तों को तीन वर्गों में दर्शाना पड़ेगा। (i) कितने विद्यार्थीयों को अतिरिक्त समय (extra classes) की आवश्यकता है। (ii) कितने विद्यार्थियों का औसत प्रदर्शन रहा। (iii) कितने विद्यार्थियों ने परिक्षा में अच्छा प्रदर्शन किया। अतः हम समुहबद्ध को आवश्यकता अनुसार समूहों में तालिका द्वारा नीचे तालिका में दर्शाए। अतः हम आवश्यकता अनुसार समूहों में बाँटकर समूहबद्ध बारंबारिता तालिका में नीचे दिए गए अनुसार बनाएँगे।

वर्गांतर (प्राप्तांक)	स्तर	गणना चिन्ह	विद्यार्थीयों की संख्या
1 - 3	पढ़ाई में अतिरिक्त समय की आवश्यकता	𝍸 𝍸 𝍸	15
4 - 5	औसत	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
6 - 10	ठीक	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	19

आवश्यकता के अनुसार दत्तों को वर्गीकृत करते है या सबसे अधिक निरिक्षण हों तो हम उन्हें समूहों में बाँटते हैं। एक और उदाहरण द्वारा समूह बद्ध बारंबारिता को देखेंगे जिससे दत्तों को समझने में आसानी होती है।

उदाहरण-2. 50 संतरों का भार (ग्राम में), टोकरी में से चुनने पर, इस प्रकार दिया गया।

35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

इस प्रकार दत्तों के प्रदर्शन में, हम 30-39, 40-49, 50-59, ... 100-109, 110-119 के समूह बनाते हैं। (क्यों कि हमारे दत्त 30 से 115 तक है) इन समूहों को कक्षांतर या वर्गांतर, कहते है उनकी लम्बाई को कक्षा की लंबाई या कक्षा का अन्तर काल हैं। इस स्थिति में 10 वर्गांतर है। इस प्रकार श्रेणी में छोटी संख्याओं को निम्न सीमा और बड़ी संख्याओं (संख्या) को उच्चसीमा कहते हैं। उदाः 30-39 में 30 श्रेणी में 39 को निम्न सीमा (निम्न सीमांत) और 39 को उच्चसीमा (उच्चसीमांत) कहते हैं।

(संतरों का भार) वर्गांतर	गणना चिन्ह	(संतरों की संख्या) बारंबारिता
30 - 39	卌 I	6
40 - 49	卌 III	8
50 - 59	卌 IIII	9
60 - 69	卌 I	6
70 - 79	III	3
80 - 89	卌	5
90 - 99	卌 II	7
100-109	III	3
110 - 119	III	3
	कुल	50

इस प्रकार दत्तों के प्रदर्शन से हमें कुछ आवश्यक जानकारियाँ एक ही नजर में प्राप्त हो सकते हैं। इन्हें समूहबद्ध बारंबारिता तालिका कहते है।

हम यह देखते हैं कि ऊपर दिए गए तालिका में श्रेणीयाँ आच्छादित नहीं हो रही है उदाः 30-39, 40-49 ... में कोई भी संख्या दुबारा दुसरी श्रेणी में नही दुहराई गई है। इस प्रकार के श्रेणी को (inclusive classes). समावेशी श्रेणीयों कहते है। नोट :हम कम लम्बाई वाले अधिक श्रेणियाँ या अधिक लम्बाई वाली कम श्रेणियों को बना सकते है। यदि मूलदत्त दिए गए हो तो व्याप्ति (Range) मालूम कर सकते है। (व्यापित = अधिकतम मूल्य – न्यूनतम मूल्य)। सुविधा अनुसार व्याप्ति के आधार पर, श्रेणी की लम्बाई और श्रेणीयों की संख्या निर्धारित कर सकते है। उदाहरण के लिए वर्गांतर 30-35, 36-40 होंगे।

वर्गांतर	वर्ग सीमाएँ
20 - 29	
30 - 39	29.5 - 39.5
40 - 49	39.5 - 49.5
50 - 59	49.5 - 59.5
60 - 69	59.5 - 69.5
70 - 79	69.5 - 79.5
80 - 89	79.5 - 89.5
90 - 99	89.5 - 99.5
100 - 109	99.5-109.5
110 - 119	109.5-119.5
120 - 129	

मानलो, यदि संतरे का भार 39.5 ग्रा. है तो इसे हम कौनसे वर्गांतर में लेंगे? हम 39.5 को न 30-39 श्रेणी में या न ही 40-49 श्रेणी में रख सकते है।

ऐसी स्थिति में हम वास्तविक सीमाओं (या सीमांत) की रचना या निर्माण कर सकते है।

पहले वर्ग की उच्चसीमा तथा अगले वर्ग की निम्न सीमा का औसत पहले वर्ग की उच्चसीमा कहलाता है। वही संख्या अगले वर्ग की निम्न सीमा भी बनती है।

उसी प्रकार सभी श्रेणियों के सीमाओं की गणना करेंगे। सबसे प्रथम श्रेणी के आगे के वर्ग तथा अंतिम श्रेणी के बाद के वर्गों को अनुमानित वर्गांतर द्वारा लिया जा सकता है। जिससे हम किसी भी प्रथम श्रेणी की निम्न सीमा तथा अंतिम श्रेणी की उच्च सीमा को प्राप्त कर सकते है।

दुबारा यह प्रश्न उठता है कि 39.5 को 29.5-39.5 या 39.5 - 49.5 श्रेणी में लेंगे? यहाँ पर अपवर्जी नियमानुसार किसी श्रेणी की निम्न सीमा समान हो तो उसे अगली श्रेणी में लिया जाता है न कि पहली श्रेणी में।

अतः 39.5 श्रेणी 39.5-49.5 में होगा।

श्रेणीयाँ जो 30-40, 40-50, 50-60, ... रूप में है वे आच्छादित श्रेणियों होती है उन्हें अपवर्जी श्रेणी कहते हैं।

जब समावेशी श्रेणीयों की सीमाओं को देखते है तो, वे असमावेशी कक्षा के रूप में दिखाई देते है। किसी श्रेणी के उच्चसीमा और निम्न सीमा के अंतर को वर्गांतर या कक्षा की लम्बाई कहते है । 90- 99 का वर्गांतर = 10 होगा। (i.e. 99.5 – 89.5 = 10) 10.

उदाहरण-3. सितंबर माह के 30 दिनों का किसी शहर का तापमान (% में) इस प्रकार दिया गया।

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) 84-86, 86,-88 वर्गांतर से समूहबद्ध बारंबारिता तालिका बनाइए।

(ii) दत्तों की व्याप्ति क्या है?

हल : (i) समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की तालिका इस प्रकार है।

वातावरण की नमी	गणना चिन्ह	दिनों की संख्या
84-86	I	1
86-88	I	1
88-90	II	2
90-92	II	2
92-94	卌 II	7
94-96	卌 I	6
96-98	卌 II	7
98-100	IIII	4

[नोट :- 90, 90-92 वर्गांतर में आता है उसी प्रकार 96, 96-98 वर्गांतर में आता हैं।]

(ii) व्याप्ति 99.2 - 84.9 = 14.3 (स्थानों के अनुसार बदलता है।)

अभ्यास - 9.1

1. निम्न अंकों से बारंबारिता बंटन तालिका बनाइए।

प्राप्तांक	5 तक	6 तक	7 तक	8 तक	9 तक	10 तक
विद्यार्थीयों की संख्या	5	11	19	31	40	45

2. नवीं कक्षा के 36 विद्यार्थियों के रक्त समूह इस प्रकार हैः

A	O	A	O	A	B	O	A	B	A	B	O
B	O	B	O	O	A	B	O	B	AB	O	A
O	O	O	A	AB	O	A	B	O	A	O	B

इन आंकडों को एक बारंबारिता सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए इन विद्यार्थीयों में कौन सा रक्त समूह अधिक सामान्य है और कौनसा रक्त समूह कम पाया गया है।

3. (3) तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछाला गया। प्रत्येक बार चित आने की संख्या निम्न है :

1	2	3	2	3	1	1	1	0	3	2	1
2	2	1	1	2	3	2	0	3	0	1	2
3	2	2	3	1	1						

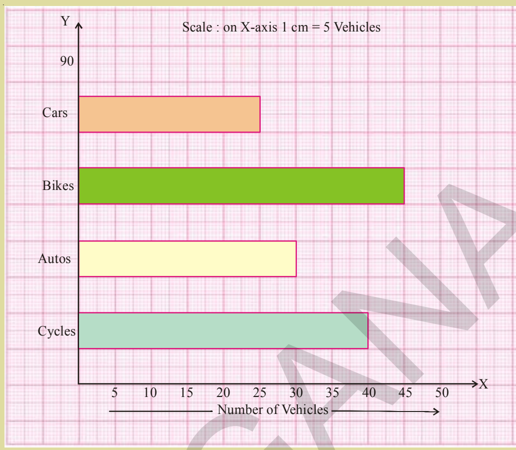
ऊपर दिये गये दत्तों से बारंबारिता तालिका बनाइए।

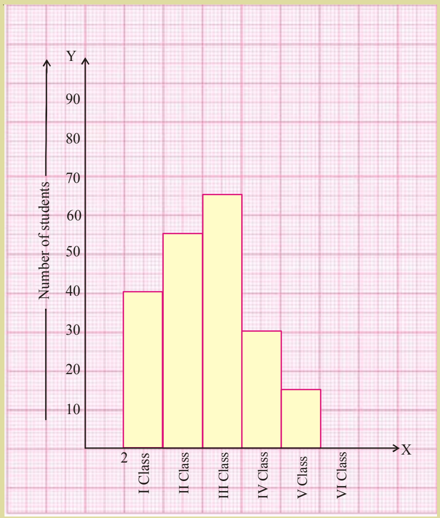
4. एक TV चैनल द्वारा धूम्रपान निषेध के बारे में SMS किया जिसमें A – पूर्ण निषेध, B – सार्वजनिक स्थानों में धूम्रपान, C – कोई आवश्यकता नहीं, एक घंटे में प्राप्त SMS इस प्रकार है।

A	B	A	B	C	B				
A	B	B	A	C	C	B	B	A	B
B	A	B	C	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	B	C	B	A	B	A
B	C	B	B	A	B	C	B	B	A
B	B	A	B	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	C	A	B	B	A	

ऊपर की तालिका, समूहबद्ध बारंबारिता तालिका को दर्शाता है। कितने उचित उत्तर प्राप्त हुए? सबसे अधिक लोगों की राय क्या होगी?

5. दिए गए बार ग्राफ में, बारंबारिता बंटन तालिका में दत्तों को दर्शाओ :





6. अक्षों पर लिये गए पैमानों को पहचानकर बारंबारिता बंटन तालिका बनाइए।

7. किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के अंक (75 में से) इस प्रकार हैं।

42, 21, 50, 37, 42, 37, 38, 42, 49, 52, 38, 53, 57, 47, 29

59, 61, 33, 17, 17, 39, 44, 42, 39, 14, 7, 27, 19, 54, 51.

समान वर्गांतर लेकर बारंबारिता तालिका बनाओ (**संकेत** : एक वर्गांतर इस प्रकार है 0-10)

8. किसी मुहल्ले में 25 घरों के बिजली के बिल (रुपये में) इस प्रकार है। 75 का वर्गांतर लेकर समूहबद्ध बारंबारिता बंटन सारणी बनाओ :-

170, 212, 252, 225, 310, 712, 412, 425, 322, 325, 192, 198, 230, 320, 412,

530, 602, 724, 370, 402, 317, 403, 405, 372, 413

9. एक कंपनी एक विशेष प्रकार की कार की बैट्रीयों बनाती है। 40 बैट्रीयों की आयु (life) वर्षों में इस प्रकार अंकित किया गया :-

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

0.5 वर्गांतर लेकर तथा श्रेणी 2 - 2.5 से प्रारंभ करके इन दत्तों की एक बारंबारिता सारणी बनाइए।

9.4 केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन (Measures of Central Tendency)

निम्न परिस्थिति का अवलोकन कीजिए

स्थिति-1 : एक छात्रावास में साधारणतः 200 इडली, 50 विद्यार्थि नाश्ते में (अल्पाहार में) खाते हैं। यदि और 20 विद्यार्थि छात्रावास में भर्ती हुए तो उनको (mess incharge) को और कितनी इडली बनानी होगी?

स्थिति-2 : एक फैक्टरी में काम कर रहे कर्मचारियों का वेतन इस प्रकार है।

कर्मचारी	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वेतन रु (हज़ार में)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

स्थिति-3 : किसी शहर के विभिन्न वाहन इस प्रकार हैं। इनमें सबसे पसंदिदा वाहन कौनसा है?

1. कार 15%
2. ट्रेन 12%
3. बस 60%
4. दुपहिया 13%

पहले स्थिती में हम साधारणतः प्रश्न को हल करने के लिए औसत (माध्य) लेते हैं। लेकिन यदि दुसरी स्थिती में भी हम औसत वेतन ले तो वह हैं जो 30.7 हज़ार होगा है, आँकडों को देखने के पश्चात् हम कह सकते है कि मध्यमान से वेतन की सही गणना नहीं हो सकती है। बहुत सारे कर्मचारियों का वेतन 12 से 18 हजार के मध्य है। अतः इस स्थिति में माध्यिका (मध्य मूल्य) सही होगी तीसरी स्थिति में बहुलक सबसे उचित विकल्प है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन में दत्तों की प्रकृति और उद्देश्य (purpose) के अनुसार औसत, माध्यिका या बहुलक का उपयोग मान सकते हैं।

विचार-विमर्श कर लिखिए।

1. तीन ऐसी स्थितीयों को लिखिए, जहाँ मध्यमान, माध्यिका और बहुलक का अपना अलग अस्तित्व है। दो क्रिकेटरों द्वारा खेले गए 5 मैचों की तुलना से दोनों के चाहने वालों ने यह बताने की कोशिश की हैं कि उनका खिलाड़ी ने दूसरे खिलाड़ी से अच्छा प्रदर्शन किया है।

खेल		1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}
रन बनाए गए	रघु	50	50	76	31	100
	गौतम	65	23	100	100	10

दोनों के प्रशंसक रनों को जोड कर, औसत रनों को इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

रघु का औसत स्कोर $= \frac{307}{5} = 61.4$

गौतम का औसत स्कोर $= \frac{298}{5} = 59.6$

रघु का औसत स्कोर (score), गौतम से अधिक है, रघु के प्रशंसक ने दावा किया कि रघु का प्रदर्शन गौतम के प्रदर्शन से अच्छा था लेकिन गौतम के प्रशंसक इस बात को नहीं मानते हैं। गौतम के प्रशंसक दोनों के स्कोरस् को अवरोही descending क्रम में जमाया और देखा की मध्य का स्कोर (score) इस प्रकार है।

Raghu	100	76	50	50	31
Gautam	100	100	65	23	10

गौतम के प्रशंसक ने कहा की मध्य का score 65 है, जो रघु के मध्य के स्कोर (score) 50 से बेहतर है अतः गौतम का प्रदर्शन अच्छा था।

लेकिन हम यह देखते हैं कि गौतम ने, पाँच खेलों में दो बार शतक बनाये इसलिए उसका प्रदर्शन अच्छा है।

अब, गौतम और रघु के प्रशंसकों के बीच के विवाद को खत्म करने के लिए, तीनों मापों को देखेंगे।

उन्होंने पहले औसत को लिया जो मध्यमान है। मध्य का स्कोर (score) जो बहस का मुद्दा बना वह है माध्यिका, उनके प्रदर्शन की तुलना करने में बहुलक को भी लिया जाता है। जहाँ स्कोर (score) बार-बार दुहराया गया। रघु का बहुलक स्कोर (score) 50 है,. गौतम का बहुलक स्कोर (score) 100 है। इन तीनों मापों में कौनसा उचित मापन होगा?

सर्वप्रथम मध्यमान को विस्तार से समझेंगे।

9.4.1 मध्यमान (Arithmatic Mean)

सांख्यिकीय दत्तों का मध्यमान सभी राशियों के योग को राशियों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त भागफल होता है। हमनें मूल दत्तों के मध्यमान की गणना के बारे में पहले ही चर्चा की है।

मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}$ या $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

9.4.1.1 मूल दत्तांशों का मध्यमान

उदाहरण-4. किसी क्षेत्र के एक सप्ताह का वर्षापात कुछ इस प्रकार हैं 4cm, 5cm, 12cm, 3cm, 6cm, 8cm, 0.5cm. प्रतिदिन के औसत वर्षापात को ज्ञात करो?

हल : प्रतिदिन का औसत वार्षापात अर्थात् उपर दिए गए दत्तांशों का मध्यमान होगा।

राशियों की संख्या (n) = 7

$$\text{मध्यमान } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n}{n}$$ जहाँ $x_1, x_2 ..... x_n$ राशियाँ होंगी।

$$\text{और } \bar{x} \text{ मध्यमान } = \frac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = \frac{38.5}{7} = 5.5 \text{ से.मी.}$$

उदाहरण-5. यदि 10, 12, 18, 13, P और 17 का मध्यमान 15 हो तो P का मूल्य ज्ञात करो।

हल : हमें मालूम है कि मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$

$$15 = \frac{10+12+18+13+P+17}{6}$$

$$90 = 70 + P$$

$$P = 20.$$

9.4.1.2 असमुहबद्ध दत्तों की का मध्यमान

इस उदाहरण में, किसी कक्षा के 40 विद्यार्थियों का भार निम्न बारंबारिता बंटन सारणी दिया गया है।

भार (x) कि.ग्रा.	30	32	33	35	37	41
विद्यार्थियों की संख्या (f)	5	9	15	6	3	2

तो भार 40 विद्यार्थियों का औसत भार ज्ञात कीजिए।

सारणी से हम यह देखते हैं कि 5 विद्यार्थियों का भार 30 किलोग्राम है, तो कुल भार $5 \times 30 = 150$ किलोग्राम उसी प्रकार हम भार का योग ज्ञात कर सकते है।

$$\text{मध्यमान } (\bar{x}) = \frac{\text{Sum of all the observations}}{\text{Total number of observations}} \qquad \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}$$

$$\text{अतः मध्यमान } = \frac{5 \times 30 + 9 \times 32 + 15 \times 33 + 6 \times 35 + 3 \times 37 + 2 \times 41}{5+9+15+6+3+2}$$

$$= \frac{1336}{40} = 33.4 \text{ किलोग्राम.}$$

यदि $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ निरिक्षणों के संबंधित बारंबारिता $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ हो तो इसे इस प्रकार लिख सकते।

मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

$\therefore\ \bar{x} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

उदाहरण-6. निम्न दत्तों का मध्यमान ज्ञात करो।

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

हल :

चरण-1 :प्रत्येक पंक्ति के $f_i \times x_i$ को हल करो प्रत्येक पंक्ति में,

चरण-2 : बारंबारिता का योग (Σf_i) तथा

$f_i \times x_i$ ज्ञात करो (Σf_ix_i) का योग

चरण-3 : गणना $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{755}{50} = 15.1$

x_i	f_i	f_ix_i
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_ix_i = 755$

उदाहरण-7. यदि इन दत्तों का मध्यमान 7.5 हो तो 'A' का मूल्य ज्ञात करो।

प्राप्तांक	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थीयों की संख्या	3	10	17	A	8	4

हल :

अंक (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	f_ix_i
5	3	15
6	10	60
7	17	119
8	A	8A
9	8	72
10	4	40
	42+A	306+8A

बारंबारिताओं का योग (Σf_i) = 42 + A

$f_i \times x_i$ का योग (Σf_ix_i) = 306 + 8A

मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ixi}{\Sigma f_i}$

दिया गया मध्यमान = 7.5

अतः $7.5 = \dfrac{306 + 8A}{42 + A}$

$306 + 8A = 315 + 7.5\,A$

$$8A - 7.5\,A = 315 - 306$$

$$0.5\,A = 9$$

$$A = 18$$

9.4.1.3 विचलन पद्धति द्वारा असमूहबद्ध दत्तों का मध्यमान
(Mean of Ungrouped Frequency Distribution by Deviation)

उदाहरण-8. दिए गए दत्तों से समानान्तर माध्य मालूम करो।

x	10	12	14	16	18	20	22
f	4	5	8	10	7	4	2

हल :

(i) सरल विधि

असमूहबद्ध बारंबारिता बंटन में, आप इस नियम का उपयोग कर सकते

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

(ii) विचलन पद्धति

इस विधि में हम एक निरिक्षण की कल्पना करेंगे जो कल्पित मध्यमान माना जाएगा है। मानलो हम '16' जो कल्पित मध्यमान मानेंगे जो A = 16, कल्पित मध्यमान से दूसरे मूल्यों का विचलन ज्ञात करेंगे।

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
10	4	−6	−24
12	5	−4	−20
14	8	−2	−16
16 A	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		−60+42=−18

बारंबारिताओं का योग $= 40$

$f_i \times d_i$ गुणफल का योग $= -60 + 42$

$$\Sigma f_i d_i = -18$$

मध्यमान $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \frac{-18}{40}$

$$= 16 - 0.45$$

$$= 15.55$$

9.4.2 माध्यिका (Median)

दिए गए राशियों का मध्य मूल्य माध्यिका होता है। जब उनको आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया तो यह दत्तों को दो समूह में विभाजित करता है, एक भाग माध्यिका से बड़े मूल्यों को समाविष्ट करता है और दुसरा भाग माध्यिका से छोटे मूल्यों को समाविष्ट करता है।

पिछली कक्षाओं में हमने चर्चा की थी कि कि निरिक्षणों का क्रम में व्यवस्थित कर माध्यिका की गणना की जाती है।

'n' निरिक्षणों के दत्तों में 'n' विषम हो तो, माध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ वीं रहती है।

जब n सम सांख्यिय है तो माध्यिका का मान $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ वाँ तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ वाँ मूल्य के बीच का मूल्य रहता है।

इसे हल कीजिए

1. निम्न लिखित मूल्यों की माध्यिका ज्ञात करो 75, 21, 56, 36, 81, 05, 42
2. आरोही क्रम में व्यवस्थित असमूहबद्ध दत्तों 7, 10, 15, x, y, 27, 30 की माध्यिका 17 है एक और निरिक्षण 50 दिए गए दत्तों में जोडा गया, तो माध्यिका 18 होगी तो x और y का मूल्य ज्ञात करो।

9.4.2.1 बारंबारिता बंटन की माध्यिका

भारात्मक निरिक्षणों के दत्तों की माध्यिका ज्ञात करने के विधि की चर्चा करेंगे, 100 कर्मचारियों की मासिक आय (वेतन) इस प्रकार है।

वेतन (रुपयों में)	7500	8000	8500	9000	9500	10000	11000
कर्मचारियों की संख्या	4	18	30	20	15	8	5

दिए गए दत्तों की माध्यिका किस प्रकार से ज्ञात करेंगे? सबसे पहले दिए गए दत्तों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करो। उसके बाद अनुरुप (संलग्न) बारंबारिताओं को तालिका में लिखेंगे और आरोही संचित बारंबारिता को ज्ञात करेंगे। हम देखेंगे कि संचित बारंबारिताओं अंको का बढ़ता हुआ क्रम होता है।

वेतन (x)	कर्मचारियों की संख्या (f)	संचित बारंबारिता (cf)
7500	4 →	4
8000	18 →	22
8500	30	52
9000	20	72
9500	15	87
10000	8	95
11000	5	100
	100	

$\frac{N}{2}$ का मूल्य ज्ञात करो और माध्यिका की श्रेणी को पहचानो जिसकी संचित बारंबारिता $\frac{N}{2}$, से अधिक हो जहाँ N बारंबारिताओं का योग होता है।

यहाँ N= 100 सम है, अतः $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ वाँ और $\left(\frac{N}{2}+1\right)^{th}$ वाँ निरिक्षण 50 और 51 क्रमशः है।

तालिका से संबंधित मूल्य 50 वाँ और 51 वाँ निरिक्षणों के समान होगा जिसका भारात्मक मूल्य 8500 होगा। अतः इस बंटन की माध्यिका 8500.

इसे हल कीजिए

1. दिए गए दत्तों से माध्यिका अंक मालूम करो :-

अंक या प्राप्तांक	15	20	10	25	5
विद्यार्थियों की संख्या	10	8	6	4	1

2. माध्यिका ज्ञात करते समय दिए गए दत्तांशों को क्रमानुसार लिखना आवश्यक हैं । क्यों ?

9.4.3 बहुलक (Mode)

यदि एक संख्या दिए गए दत्तों में कई बार दुहराई जाती है या एक निरीक्षण (संख्या) जिसकी बारंबारिता सबसे अधिक है उसे दिए गए दत्तों का बहुलक कहा जाता है।

उदाहरण-9. एक जूते की दुकान में किसी दिन निम्न (माप) जूते बिकें तो बहुलक ज्ञात करो।

6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6.

हल : सबसे पहले दिए गए निरिक्षणों को क्रम से व्यवस्थित करेंगे 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10 बारंबारिता बंटन तालिका बनाई गई।

Size	6	7	8	9	10
बिके जूतों की संख्या	4	5	1	2	1

यहाँ 7 नंबर के जूते ज्यादा बिकें i.e., 5 बार

∴ अतः दिए गए दत्तों का बहुलक (जूते का माप) 7 है। यह मालूम होता है कि '7' नंबर का जूता सबसे ज्यादा बेचा गया है।

विचार विमर्श कर लिखिए

1. आपके सहपाठीयों को उनकी ऊँचाई के अनुसार वर्गीकृत करो और बहुलक मालूम करो।
2. यदि दुकानदार को जूतों का ऑर्डर देना हो तो किस नंबर के जूते अधिक मंगवाने पढेंगे।

उदाहरण-10. किसी कक्षा के 20 विद्यार्थियों द्वारा (100 अंको में से) प्राप्त किए गए अंक इस प्रकार है।

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

(a) 91-100, 81-90, ... वर्गांतर लेते हुए बारंबारिता तालिका बनाओ।

(b) बहुलक को वर्ग को चुनिये (सबसे बड़ी बारंबारिता वाला वर्ग बहुलक वर्ग माना जायेगा।)

(c) (उस) वर्गांतर को ज्ञात करो जिसमें माध्यिका हो।

हल :

(a)

प्राप्तांक	बारंबारिता	Greater than Cumulative frequency
91-100	9	20
81-90	6	11
71-80	3	5
61-70	0	2
51-60	2	2
कुल	20	

(b) 91-100 की श्रेणी (modal class) में सबसे बड़ी बारंबारिता पायी गयी है।

(c) 20 का मध्यमूल्य 10 है। यदि हम ऊपर से गिनती करने पर, 81-90 के श्रेणी में 10 बारंबारिता पायी गयी है। इसलिए मध्यिका का वर्गांतर 81-90 होगा।

9.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में विचलन (Deviation in Values of Central Tendency)

यदि हम समान मूल्य सभी दत्तों में जोड़ने पर या प्रत्येक दत्तों से गुणा करने पर केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप में क्या होगा?

निम्न तालिका को देखो।

विवरण	दत्त	मध्यमान	बहुलक	माध्यिका
वास्तविक दत्तों का समूह	6, 7, 8, 10, 12, 14, 14, 15, 16, 20	12.2	14	13
प्रत्येक दत्त में 3 जोड़ने पर	9, 10, 11, 13, 15, 17, 17, 18, 19, 23	15.2	17	16
प्रत्येक दत्तों को 2 से गुणा करने पर	12, 14, 16, 20, 24, 28, 28, 30, 32, 40	24.4	28	26

इस तालिका को देखने के बाद हम यह कह सकते हैं कि,

जोड़ने पर : जिस राशि को जोड़कर दत्तों का मूल्य बदल गया है।केन्द्रीय प्रवृत्ती के मान में भी उतनी ही बढ़ोतरी होगी।प्रत्येक दत्त में 3 जोड़ने पर, मध्यमान, माध्यिका और बहुलक में भी 3 की बढ़ोतरी होगी।

गुणा करने पर : सभी दत्तों के मूल्यों पर जिस संख्या के गुणा का प्रभाव होता हैं वही केन्द्रीय प्रवृत्ती के माप पर भी देखेगा। यदि प्रत्येक निरिक्षण को 2 से गुणा किया जाय तो मध्यमान, माध्यिका और बहुलक को भी 2 से गुणा करना पड़ेगा।

अभ्यास - 9.2

1. यातायात कार्यालय में पारसल (parcels) का भार इस प्रकार दिया गया।

भार (kg)	50	65	75	90	110	120
पार्सल संख्या	25	34	38	40	47	16

तो पार्सलो का मध्यमान भार ज्ञात करो।

2. एक गाँव के परिवारों की संख्या और उनमें बच्चों की संख्या इस प्रकार है।

बच्चों की संख्या	0	1	2	3	4	5
परिवारों की संख्या	11	25	32	10	5	1

प्रत्येक परिवार के बच्चे का मध्यमान ज्ञात करो।

3. निम्न बारंबारिता बंटन का मध्यमान 7.2 हो तो 'K' का मान ज्ञात करो।

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

4. भारतीय जनगणना 2011 के अनुसार गाँवों की जनसंख्या इस प्रकार है।

जन संख्या (हज़ारों में)	12	5	30	20	15	8
गाँव	20	15	32	35	36	7

प्रत्येक गाँव की औसत जन संख्या ज्ञात करो।

5. AFLATOUN सामाजिक और आर्थिक शैक्षणिक योजना के अंतर्गत, हैदराबाद शहर के उन्नत पाठशाल के विद्यार्थियों की बचत योजना, में मंडलों की मासिक बचत इस प्रकार है।

मंडल	विद्यालय की संख्या	कुल बचत (रुपये)
अम्बरपेट	6	2154
तिरुमलगिरी	6	2478
सैदाबाद	5	975
खैरताबाद	4	912
सिकंदराबाद	3	600
बहादुरपुरा	9	7533

प्रत्येक मंडल के पाठशाला का औसत बचत ज्ञात कीजिए तथा सभी पाठशालाओं के कुल बचत का औसत ज्ञात कीजिए।

6. किसी विद्यालय के IX नवीं कक्षा के लड़के और लड़कियों की ऊँचाई इस प्रकार दी गई।

ऊँचाई (cm)	135	140	147	152	155	160
लडकें	2	5	12	10	7	1
लडकियाँ	1	2	10	5	6	5

लड़के और लड़कियों की ऊँचाई की तुलना करो।

[**संकेत :** लडके और लडकियों की ऊँचाई की माध्यिका ज्ञात करो।]

7. विश्व में शतक प्राप्त क्रिकेटरों की संख्या इस प्रकार दी गई है।

शतकों की संख्या	5	10	15	20	25
क्रिकेटरों की संख्या	56	23	39	13	8

दीए गये दत्तों का मध्यमान, मध्यिका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

8. नए वर्ष के उपलक्ष्य में एक मीठाई के दुकान में मीठाईयों के पाकेट बनाए गए। मीठाई पाकेटों की संख्या और प्रत्येक पाकेट की किमत इस प्रकार दी गई।

पाकेट की कीमत (रु.में)	25 रु.	50 रु.	75 रु.	100 रु.	125 रु.	150 रु.
पाकेट की संख्या	20	36	32	29	22	11

तो मध्यमान, माध्यिका और बहुलक ज्ञात करो।

9. तीन विद्यार्थीयों का (औसत) भार 40 kg. (किलो) उनमें एक विद्यार्थी रंगा का भार 46 kg. (किलो) है। दुसरे दो विद्यार्थी रहीम और रेश्मा का भार समान है तो रहीम का भार ज्ञात करो।

10. एक अनाथ आश्रम के लिए किसी माध्यमिक विद्यालय के विभिन्न छात्राओं द्वारा चंदा एकट्ठा किया गया जो इस प्रकार है।

कक्षा	प्रत्येक छात्रा द्वारा चंदा (रुपये में)	छात्राओं की संख्या
VI	5	15
VII	7	15
VIII	10	20
IX	15	16
X	20	14

दिए गए दत्तों से मध्यमान, माध्यिका और बहुलक ज्ञात करो।

11. चार अज्ञात संख्याएँ हैं, उनमें दो संख्याओं का मध्यमान 4 और प्रथम तीन संख्याओं का मध्यमान 9 है। सभी चार संख्याओं का मध्यमान 15, यदि उनमें से एक संख्या 2 है तो दुसरी अन्य संख्याएँ ज्ञात करो।

हमने क्या सीखा?

- निरिक्षणों का बारंबारिता के साथ तालिका रूप में प्रदर्शन करने **भारात्मक निरिक्षण तालिका** या **असमूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका** कहते हैं।
- अधिक दत्तों को बारंबारिता तालिका के रूप में लिखने से एक ही नजर में हम उसकी व्याप्ति को ज्ञात कर सकते हैं। कौनसा निरिक्षण बार-बार कितने बार दोहराया गया, दत्तों का आसानी से व्याख्या तथा विश्लेषण कीया जा सकता हैं।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, एक विशेष दत्त होता है जिसके चारों ओर अन्य दत्तों का समावेश होता है।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप : मध्यमान, बहुलक, मध्यिका है।
- सांख्यिकीय दत्तों का मध्यमान सभी राशियों के योग को राशियों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त भाग फल होता है।

$$\text{मध्यमान} = \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}} \quad \text{या} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

- समूहबद्ध बारंबारिता बंटन का मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$.

- विचलन पद्धति से, समानांतर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$ जहाँ A काल्पनिक मध्य मूल्य और Σf बारंबारिताओं का योग और $\sum fd$ विचलन तथा बारंबारिता के गुणनफल का योग होता है ।
- दत्तों को (आरोही या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करने पर इस व्यवस्था के मध्य का मूल्य माध्यिका कहलाता है।
- जब निरिक्षण की संख्या विषम हो तो माध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ वीं राशी रहती है।
- जब निरिक्षणों की संख्या सम रहती है तब माध्यिका का मान बीच के दो दत्तों का औसत रहता है जो कि $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ वाँ ौर $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ वाँ राशी रहती है।
- माध्यिका दत्तों को दो समुह में विभाजित करती है एक भाग में मध्यिका बड़े मूल्यों का समावेश होता है जबकि दूसरे भाग में मध्यिका से छोटे मूल्यों का समावेश होता है।
- यदि एक संख्या दिए गए दत्तों में कई बार दुहराई जाती है या एक निरीक्षण (संख्या) जिसकी बारम्बारिता सबसे अधिक है उसे दिए गए दत्तों का बहुलक कहा जाता है।

होशियारी का खेल

विद्यार्थियों के एक पंक्ति में गोपी बाईं ओर से 7 वें स्थान पर हैं, और दाँयें से 5 वें स्थान पर शंकर है, यदि वे आपस में अपना स्थान बदल दें तो शंकर दाँये से 8 वें स्थान पर होगा, तो उस पंक्ति में कितने विद्यार्थी हैं?

एक लड़का चैतन्या अपना नाम पेड़ की छाल पर लिखा जिसकी ऊँचाई 1.5 मी. है। पेड़ की ऊँचाई 4.5 मी. है तथा दस वर्ष बाद पेड़ की ऊँचाई 6.75 मी. हो गयी तब जमीन से कितनी ऊँचाई पर चैतन्या का नाम खुदा होगा?

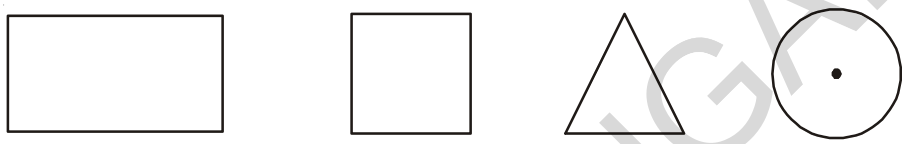
आपके उत्तर का कारण बताइए?

10 समतलीय क्षेत्रफल एवं आयतन
(Surface Areas and Volumes)

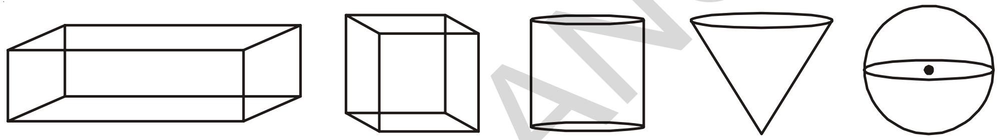
10.1 प्रस्तावना

निम्न आकृतियों को ध्यान से देखिए:

(a)



(b)

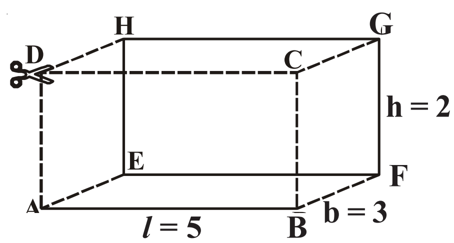


समूह (a) और (b) की आकृतियों मे क्या कोई अंतर आपने देखा?

ऊपर दी हुई आकृतियों में, समूह (a) की आकृतियाँ आसानी से हम अपनी कापी में उतार सकते हैं। इन आकृतियों की केवल लम्बाई और चौड़ाई हैं। इन्हें द्विविमीय आकृतियाँ अथवा 2-D वस्तुएं कहते हैं। समूह (b) की आकृतियाँ जिनकी लम्बाई, चौड़ाई और उँचाई हैं, त्रिविमीय आकृतियाँ अथवा 3-D वस्तुएं कहलाती हैं। ये ठोस आकृतियाँ कहलाती हैं। सामान्यतः हम अपने चारों ओर ठोस आकृतियाँ देखते है। तुमने अबतक समतलीय आकृतियाँ और उनके क्षेत्रफलों के बारे मे सीखा है? अब हम 3-D वस्तुाओं जैसे बेलन, शंकु और गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करना सीखेंगे।

10.2 घनाभ के समतल का क्षेत्रफल (Surface Area of Cuboid)

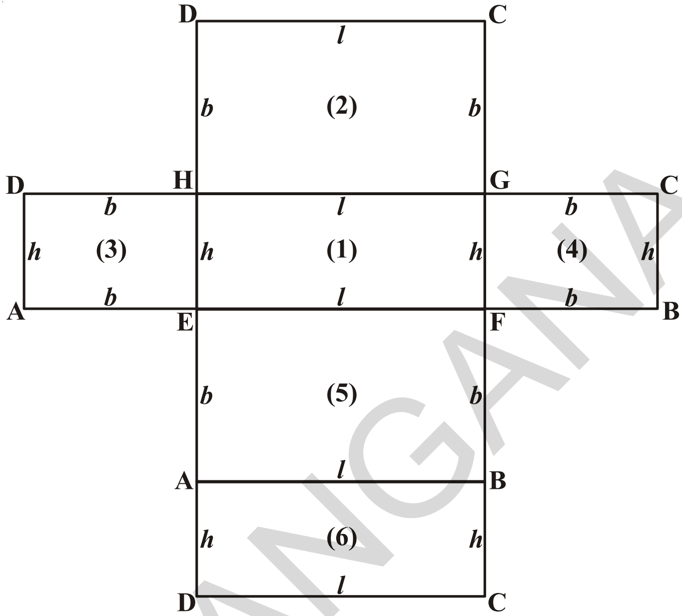
घनाभ को ध्यनपूर्वक देखिए । इसके कितने फलक हैं ज्ञात कीजिए? इसके कितने कोनें और कितनी भुजाएँ है? क्या इसके फलक, समतल है? कोनसे फलकों के युग्म माप मे बराबर है? क्या तुम्हे इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए कोई विचार आता है?



अब हम धनाभ का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात करते है।

ऊपर दी हुई आकृति मे लम्बाई $(l) = 5$ से.मी.; चौडाई $(b) = 3$ से.मी.; उँचाई $(h) = 2$ से.मी.

यदि हमने CD, ADHE और BCGF. के साथ दिए गए घनाभ को काटक और खोल दिया तो हमे प्राप्त हुई आकृति निम्न प्रकार जैसे होगीः



यह दर्शाता है कि घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल, तीन तद्रूप आयतों के युग्मो से अर्थात् छः आयतों सें बना है। घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें छः आयताकर फलकों के क्षेत्रफलों को जोडना हौगा । इन क्षेत्रफलों का योग हमे घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल देता है ।

EFGH आयत का क्षेत्रफल $= l \times h = lh$ .....(1)

HGCD आयत का क्षेत्रफल $= l \times b = lb$ .....(2)

AEHD आयत का क्षेत्रफल $= b \times h = bh$ .....(3)

FBCG आयत का क्षेत्रफल $= b \times h = bh$ .....(4)

ABFE आयत का क्षेत्रफल $= l \times b = lb$ .....(5)

DCBA आयत का क्षेत्रफल $= l \times h = lh$ .....(6)

ऊपर के क्षेत्रफलों को जोडने पर, हमे घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल प्रप्त होगाा ।

घनाभ का संपूर्णतल का क्षेत्रफल $= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)$ का क्षेत्रफल

$= lh + lb + bh + bh + lb + lh$

$= 2\,lb + 2lh + 2bh$

$= 2(lb + bh + lh)$

(1), (3), (4), (6) मे घनाभ के पार्श्व पृष्ट है ।

घनाभ का पार्शतल का क्षेत्रफल = Area of $(1) + (3) + (4) + (6)$ का क्षेत्रफल

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2lh + 2bh$

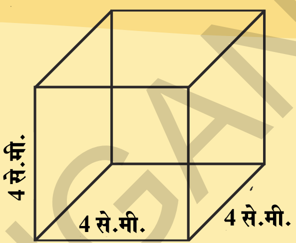
$= 2h\,(l + b)$

अब, ऊपर दी गई आकृति के लिए घनाभ का पृष्टीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे । इस तरह संपूर्ण पृष्ट 62 से.मी.^{2} और पार्श्व तल 32 से.मी.^{2} है ।

इसकी कोशिश कीजीए

'l' से.मी. भुजा वाला लीजिए और इसके पहले जैसे काटा था वैसे काटिए । घन का संपूर्ण पृष्ट और पार्श्व पृष्ठ ज्ञात कीजिए ।

प्रयत्न कीजिए

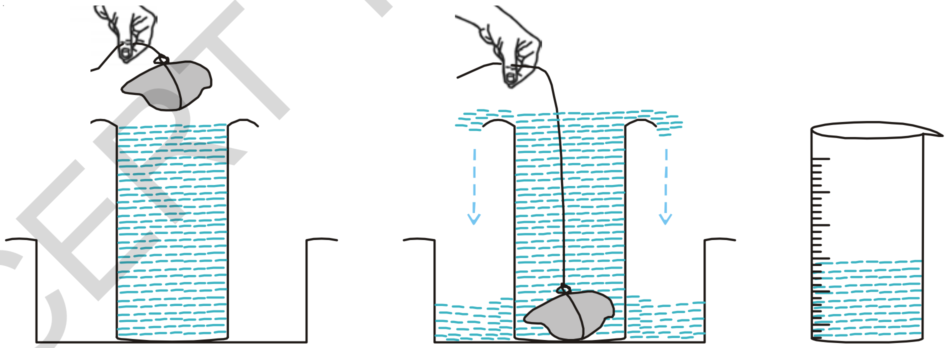


1. ऊपर की गई कोशिश मे व्युत्पन्न सूत्र का उपयोग करते हुए 4 से.मी. भुजा के घन का संपूर्ण तल और पार्श्व तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
2. घन की प्रत्येक कोर 50% से बढाई गई । इसके संपूर्णतल क्षेत्रफल मे प्रतिशत की बढत ज्ञात कीजिए ।

10.2.1 आयतन (Volume)

आयतन की संकल्पना याद करने का लिए, निम्न लिखित क्रिया कलाप करते है ।

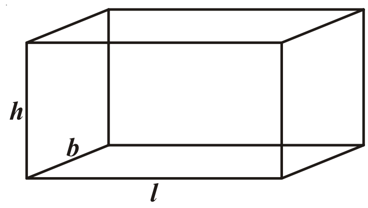
एक कांच का जार लेकर, उसे एक पात्र मे रखिए । काँच के जार मे डालिए ऊपर के किनारे तक पानी भरीए । धीरेसे एक ठोस वस्तु (पत्थर) उसमे डालिए । जार से कुछ पानी पात्र मे छलता है । छलका हुआ पानी मापक जार मे लीजिए । इससे ठोस वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान के बारे मे जानकारी मिलती है । यही आयतन कहलाता है ।



10.2.2 पात्र की धारिता (क्षमता) (Capacity of Container)

यदि वस्तु खोखली है, तब अंतरिक भाग रिक्त रहता है और वह हवा अथवा किसी दूसरे द्रव पदार्थ से भर सकते है, यह पदार्थ इसके पात्र का आकार धारण करता है । पदार्थ का आयतन जो पात्र के आंतरिक भाग मे भर सकते है, पात्र की धारिता कहलाती है ।

घनाभ का आयतनः किसी गत्ते से एक समान माप वाले कुछ आयत काटिए और उन्हे एक दूसरे के ऊपर रखिए । बने हुए आकार के बारेमे तुम क्या कह सकते हो?



यह आकार घनाभ है ।

अब हम घनाभ का आयतन ज्ञात करते है ।

इसकी लम्बाई, आयत की लम्बई के समान है, और चौडाई, आयत की चौडाई के समान है । उँचाई जहाँतक आयत की धूरी बनी है, वही घनाभ की उँचाई 'h' है ।

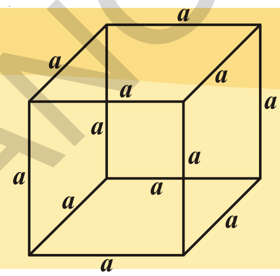
घनाभ द्वारी घिरी हुई जगह = आयत द्वारा घिरे हुए समतल भाग का क्षेत्रफल × उँचाई

घनाभ का आयतन $= l\,b \times h = l\,bh$

$\therefore$ घनाभ का आयतन $= l\,bh$

जहाँ l, b, h घनाभ की लम्बाई, चौडाई और उँचाई है ।

इसकी कोशिश कीजीए



(a) घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 'a' इकाई है ।

(b) घन की कोर ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 1000 से.मी.^{3} है ।

मानिए कि घनाभ और घन ठोस हैं ।क्या हम इन्हे लम्ब प्रिज्म कह सकते है? ध्यानपूर्वक देखनेपर तुम्हे मालुम हुआ कि इन्हे लम्ब प्रिज्म भी कहते है? क्यों कि इनके पार्श्व फलक आयताकार है और आधार पर लम्ब रहते है ।

हम जानते है कि घनाभ का आयतन, उसके आधार का क्षेत्रफल और उँचाई का गुणनफल होता है ।

स्मरण कीजिए कि घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × उँचाई

$= lb \times h$

$= lbh$

घन में, $= l = b = h = \text{s}$ (सभी परिमाण एक समान रहते है)

घन का आयतन $= \text{s}^2 \times \text{s}$

$= \text{s}^3$

हम अनुमान लगाते है कि धनाभ के आयतन का सूत्र सभी लम्ब प्रिज्म के लिए सही है ।

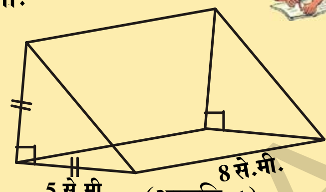
अतः लम्ब प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × उँचाई

विशेषतः यदि लम्ब प्रिज्म का आधार समबाहु त्रिभुज हो तो, इसका आयतन $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 \times \text{h}$ धन इकाइयाँ.

जहाँ आधार के प्रत्येक भुजा की लम्बाई 'a' और प्रिज्म की उँचाई 'h' है ।

इन्हे हल कीजीए

1. घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए यदि $l = 12$ से.मी., $b = 10$ से.मी. और $h = 8$ से.मी.
2. घन का आयतन ज्ञात कीजिए यदि इसकी भुजा 10 से.मी. है ।
3. समद्विबाहु समकोण त्रिभुजाकार प्रिज्म (आकृति1) का आयतन ज्ञात कीजिए ।



(आकृति 1)

प्रिज्म (समपार्श्व) के समान पिरामिड (सूचीस्तम्भ) भी त्रिविमीय ठोस आकृति है । प्राचीन काल से ही यह आकृति मानवजाती को सम्मोहित्त करते आयी है । तुमने इजिप्त के पिरामिड के बारे मे पढा होगा जो दुनिया के सात आश्चर्यो में से एक है । ये, वर्ग आधार पर बनाए गए पिरामिड के यथार्थ उदाहरण है । वे कैसे बनाये है? यह रहस्य है । कैसे ये भारी -भरकम ढंाचे बनाये है, कोई भी नही जानता ।

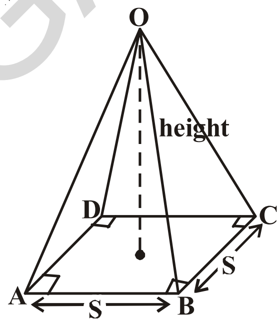
क्या तूम पिरामिड का आकार बना सकते हो?

तुमने प्रिज्म और पिरामिड मे क्या अंतर पाया?

वर्ग आधार के पिरामिड को तुम क्या कहोगे?

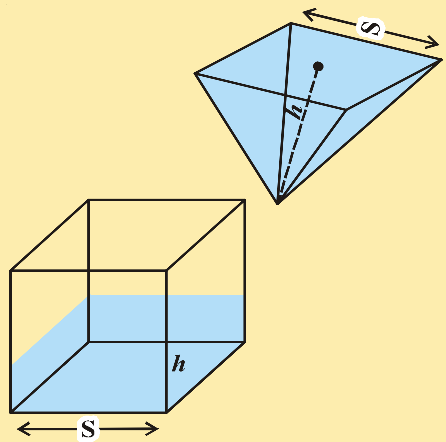
यहाँ OABCD यह 'S' भुज का वर्ग पिरेमिड है जिसकी उँचाई 'h' है ।

क्या तुम वर्ग पिरामिड के आयतन को घन के आयतन के पदो में अनुमान लगा सकते हों यदि दोनों के आधार और उँचाई समान है?



क्रियाकलाप

वर्ग पिरामिड और घन आकार के दो पात्र लीजिए जिनके आधार समान है और दोनों की उँचाई बराबर है । पिरामिड द्रव पदार्थ से भरीए और इसे घनाकार पात्र (पिज्म) मे पूर्णतः उंडेल दिया । घनाकार पात्र भरने के लिए कितनी बार यह क्रिया करनी होगी? इससे तुम क्या निष्कर्ष निकालते हो?



इस तरह, पिरामीड का आयतन

$= \frac{1}{3}$ लम्ब प्रिज्म के आयतन

$= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ उँचाई

नोटः एक लम्ब प्रिज्म का आधार, इसके पार्श्व भुजाओं को लम्ब रहते है और सभी पार्श्व फलक आयत रहते हों ।

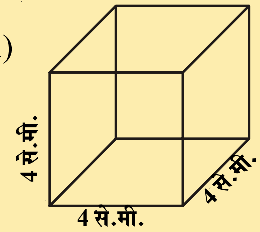
इन्हें हल कीजीए

1. पिरामिड का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका आधार 10 से.मी. का वर्ग और उँचाई 8 से.मी. है ।
2. एक घन का आयतन 1200 घन से.मी. है । समान उँचाई के वर्ग पिरामिड का आयतन ज्ञात कीजिए?

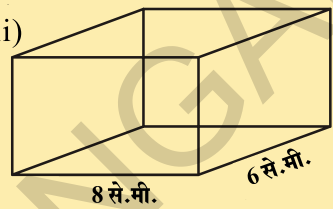
अभ्यास - 10.1

1. नीचे दर्शाये गये लम्ब प्रिज्म के संपूर्ण तल और पार्श्व तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(i)



(ii)



2. एक घन के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल 1350 वर्ग मीटर हो तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए ।
3. एक कक्ष के चार दीवारों का क्षेत्रफल (मानिए कि इसमे दरवाजे और खिडकीयाँ नही है) ज्ञात कीजिए यदि इसकी लम्बाई 12 मी., चौडाई 10 मी. और उँचाई 7.5 मी. है ।
4. एक घनाभ का आयतन 1200 से.मी^{3} है । इसकी लम्बई 15 से.मी. और चौडाई 10 से.मी. है । इसकी उँचाई ज्ञात कीजिए ।
5. एक डिब्बे का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल कैसे बदलेगा यदि

(i) प्रत्येक भुजा को दुगुना किया हो ? (ii) प्रत्येक भुजा को तीन गुणा किया गया?

शब्दोमें व्यक्त कीजीए? यदि प्रत्येक भुजा को n बार बढ़ाया गया तो उसका संपूर्ण तल का क्षेत्रफल कितने गुना बढ़ जाएगा ।

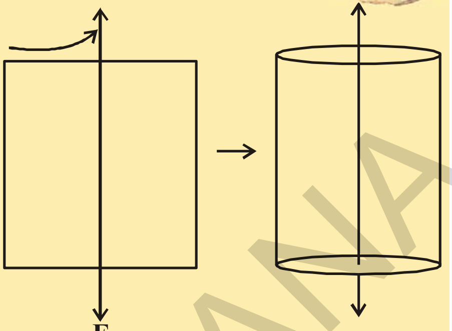
6. प्रिज्म का आधार त्रिभुजाकार है जिसकी भुजाएं 3 से.मी., 4 सी.मी. और 5 से.मी. है । प्रिज्म का आयतन ज्ञात कीजिए यदि इसकी उँचाई 10 से.मी.
7. एक 3 मी. ऊँचा नियमित वर्ग पिरामिड है जिसके आधार का परिमाप 16 मी है । पिरामिड का आयतन ज्ञात कीजीए ।
8. ऑलिम्पिक खेल में एक तैरने का तालाब घनाभ के आकार मे है जिसकी भुजाएँ 50 मी. लम्बा और 25 मी. चौडा और 3 मी. गहरा है । यदि इसमे सभी जगह 3 मी. गहरा पानि है तो इसमे कितने लीटर पानी होगा?

क्रियाकलाप

एक आयताकार कागज का टुकडा काटिए । आकृति मे दिखाए जैसे एक मोटा तार चिपकाईए । आयत के दोनो ओर तार को तुम्हारे हाथ से कसकर पकडिए और जितना तेज तुम घुमा सकते हो उतना तेज तार को अक्ष मानकर घुमाईए ।

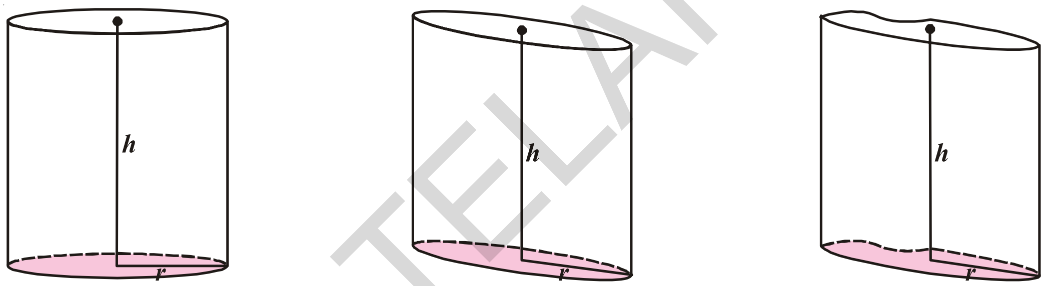
घुमता हुआ आयत कौनसा आकार बना रहा है, क्या तुम पहचानते हो?

क्या यह तुम्हे बेलन के आकार का स्मरण कराता है?



10.3 लम्ब वृत्तीय बेलन (Right Circular Cylinder)

निम्न बेलनों को ध्यानपूर्वक देखिएः



(i) आकृती (i), (ii) और (iii) में क्या समानताएं तुमने देखी है?

(ii) तुमने आकृति (i), (ii) और (iii) में क्या अंतर पाया है?

(iii) कौनसी आकृति में, रेखाखण्ड इसके आधार का लम्ब है?

प्रत्येक बेलन, एक पार्श्वपृष्ठ और दोनों सिरोंपर दो सर्वसमान वृत्ताकार फलकों से बना है । यदि वृत्ताकार पृष्टों के केंद्र को जोडने वाला रेखाखण्ड, इसके आधार का लम्ब है, ऐसा बेलन, लम्बाकार बेलन कहलाता है।

ऊपर दी हुई आकृतियों मे कौनसा लम्ब वृत्तीय बेलन है, ज्ञात कीजिए? कौनसे नही है? कारण दीजिए।

बेलन उत्पन्न करनेके लिए कुछ क्रिया करते है ।

10.3.1 बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल

गत्ते से बनाया हुआ एक लम्ब वृत्तीय बेलन लीजिए । वक्र फलक ऊर्ध्वाधर दिशामें काटिए और सीधा कीजिए । सीधा करते समय इसकी उँचाई और वृत्ताकार आधार के रूपांतरण की ओर ध्यान दीजिए ।

बेलन को सीधा करने के पश्चात तुम कौनसा आकार पाओगे?

तुम इसे आयत के आकार मे पाओगे । आयत का क्षेत्रफल और बेलन का वक्रपृष्ट बराबर रहते है । बेलन की उँचाई, आयत की चौडाई के बराबर, और इसके आधार का परिमाप आयत की लम्बाई के बराबर रहता है ।

बेलन की उँचाई = आयत की चौडाई ($h = b$)

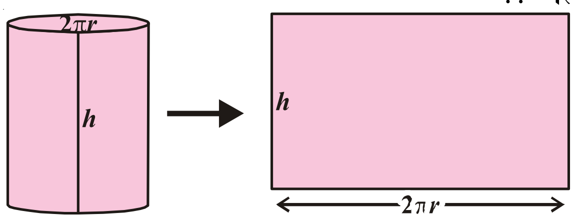
बेलन के आधार की परिधि जिसका आर्धव्यास 'r' = आयत की लम्बाई ($2\pi r = l$)

$\therefore$ बेलन का वक्र पृष्ट = आयत का क्षेत्रफल

= लम्बाई × चौडाई

$= 2\,\pi r \times h$

$= 2\pi rh$



इसीलिए, बेलन का वक्रपृष्ट = **2πrh**

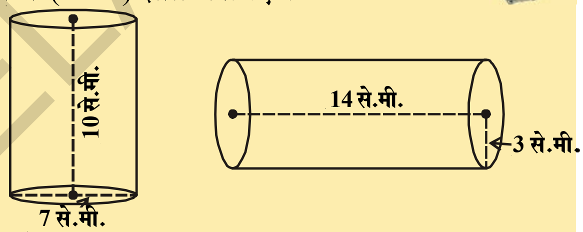
इन्हें हल कीजीए

निम्न लिखित बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल (CSA) ज्ञात कीजिए ।

(i) $r = x$ से.मी., $h = y$ से.मी.

(ii) $d = 7$ से.मी., $h = 10$ से.मी.

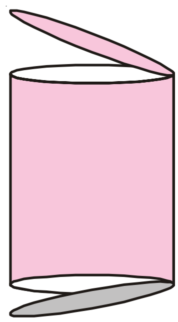
(iii) $r = 3$ से.मी., $h = 14$ से.मी.



10.3.2 बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल

(Total Surface Area of a Cylinder)

संलग्न आकृति को ध्यानपूर्वक देखिए ।



क्या यह लम्ब वृत्तीय बेलन है? इसका संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इसमे कौनसे पृष्टों का क्षेत्रफल मिलाना होगा? ये वक्र धरातल का क्षेत्रफल और दो वृत्तीय फलकों का क्षेत्रफल है ।

अब बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल

= वक्र पृष्ट + ऊपरी तह का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

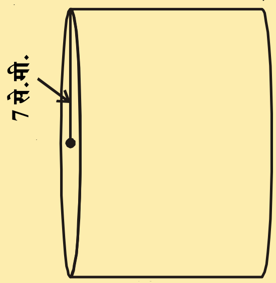
$= 2\pi r\,(r + h)$

$\therefore$ बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(r + h)$ जहाँ बेलन का अर्धव्यास 'r' और इसकी उँचाई 'h' है ।

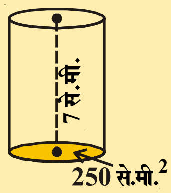
इन्हें हल कीजीए

निम्न लिखित बेलन के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(i)



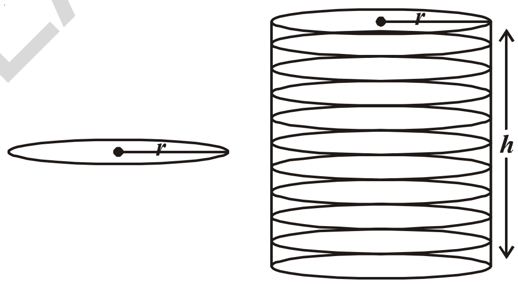
(ii)



10.3.3 बेलन का आयतन (Volume of the Cylinders)

समान अर्धव्यास के वृत्त लीजिए और इन्हे एक के ऊपर एक इस प्रकार रखिए । यह क्रिया कीजिए और यह बेलन बना था नही, ज्ञात कीजिए ।

संलग्न आकृतिमें, वृत्त का अर्धव्यास ‘r’ है । जिस ऊँचाई तक वृत्तों की धूरी बनी है। वही बेलन की उँचाई ‘h’ है ।



बेलन का आयतन$= \pi r^2 \times$ ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h$

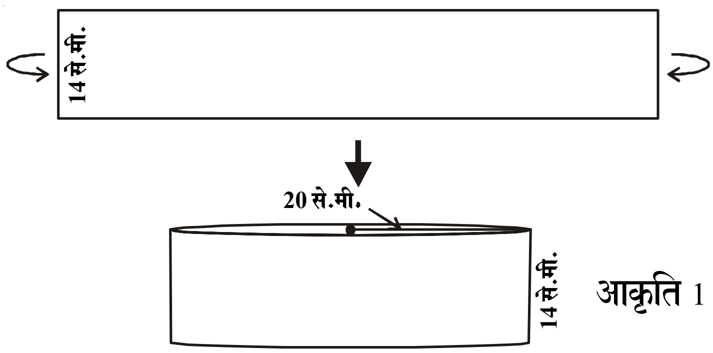
$= \pi r^2 h$

$\therefore$ बेलन का आयतन $= \boldsymbol{\pi r^2 h}$.

जहा बेलन का अर्धव्यास ‘r’ और उँचाई ‘h’ है ।

उदाहरण-1. एक 14 से.मी. चौडे आयताकार कागज के टुकडे को, इसकी चौडाई को अक्ष मानकर मोडने से 20 से.मी. अर्धव्यास का बेलन बना। बेलन (आकृति1) का आयतन ज्ञात कीजिए?($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल : आयत को चौडाई मे मोडकर बेलन बनाया गया । इसलिए कागज के टुकडे की चौडाई, बेलन की उँचाई होगी। बेलन का अर्धव्यास = 20 से.मी. है।



आकृति 1

बेलन की उँचाई $= h = 14$ से.मी.

अर्धव्यास $(r) = 20$ से.मी.

बेलन का आयतन $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

$$= 17600 \text{ से.मी.}^3$$

अतः बेलन का आयतन 17600 से.मी.^{3}

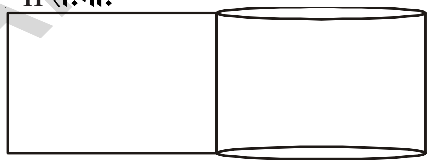
उदाहरण-2. एक 11 से.मी. × 4 से.मी. आयताकर कागज के टूकडे को एक कोर दूसरी कोर को न ढँकते हुए 4 से.मी. उँचाई के बेलन के रूप मे मोडा गया । बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए ।

हल : कागज के टुकडे की लम्बाई, बेलन के आधार की परिधि होगी और इसकी चौड़ाई, बेलन की उँचाई होगी।

माना कि बेलन का अर्धव्यास = r , और उँचाई = h

बेलन के आधार की परिधि = 2πr = 11 से.मी.

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$



$$\therefore \quad r = \frac{7}{4} \text{ से.मी.}$$

$$h = 4 \text{ से.मी.}$$

बेलन का आयतन $(V) = \pi r^2 h$

$$= = \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ से.मी}^3$$

$$= 38.5 \text{ से.मी}^3$$

उदाहरण–3. एक 44 से.मी. × 18 से.मी. आयताकर कागज के टुकडे को बेलन बनाने के लिए लम्बाई मे मोडा गया। माना कि बेलन ठोस (पूर्णतः भरा हुआ), इसका संपूर्ण तल का क्षेत्रफल और अर्धव्यास ज्ञात कीजिए ।

हल : बेलन की उँचाई = 18 से.मी.

बेलन का आधार की परिधि = 44 से.मी.

$$2\pi r = 44 \text{ से.मी.}$$

$$r = \frac{44}{2 \times \pi} = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7 \text{ से.मी.}$$

बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(r + \text{h})$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 7(7+18)\,\text{से.मी}^2$$

$$= 1100\ \text{से.मी}^2$$

उदाहरण-4. 5 मि.मी. मोटे वृत्ताकार चक्र (dices) एक के ऊपर एक इस प्रकार रखे कि 462 से.मी.^{2} वक्र धरातल का बेलन बना। यदि चक्र का अर्धव्यास 3.5 से.मी. हो तो चक्रोंकी संख्या बताईए।

हल : चक्र की मोटाई $= 5$ मि.मी. $= \frac{5}{10} = 0.5$ से.मी.

चक्र का अर्धव्यास $= 3.5$ से.मी.

बेलन का धरातल का क्षेत्रफल $= 462$ से.मी^{2}

$\therefore\ 2\pi\text{rh} = 462$ ..... (i)

माना कि, चक्रों की संख्या $= x$

$\therefore$ बेलन की उँचाई $=$ h $=$ चक्र की मोटाई $\times$ चक्रों की संख्या

$= 0.5\,x$

$\therefore\ 2\,\pi\text{rh} = 2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x$ ..... (ii)

(i) और (ii) से, हमें प्राप्त होता है

$$2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x = 462$$

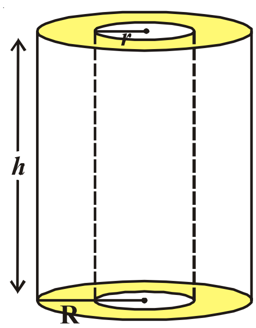
$$\therefore\ x = \frac{462\times 7}{2\times 22\times 3.5\times 0.5} = 42\ \text{चक्र}$$

उदाहरण-5. एक खोखले बेलन की बाहरी त्रिज्या 8 से.मी. और उँचाई 10 से.मी. तथा संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल 338 π से.मी.^{2} है। खोखले धातु के बेलन की मोटाई ज्ञात कीजिए।

हल : बाह्य त्रिज्या $=$ R $= 8$ से.मी.

भीतरी त्रिज्या $=$ r

उँचाई $= 10$ से.मी.



संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल (TSA) $= 338\pi$ से.मी.^{2}

परंतु संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल (TSA) $=$ बाह्य बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल (CSA)

$+$ भीतरी बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल (CSA)

$+2+$ आधार के बलय (ring) का श्रेत्रफल

$= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi (R^2 - r^2)$

$= 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2)$

$\therefore\ 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2) = 338\pi$

$Rh + rh + R^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow\ (10 \times 8) + (r \times 10) + 8^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow\ r^2 - 10r + 25 = 0$

$\Rightarrow\ (r - 5)^2 = 0$

$\therefore\ r = 5$

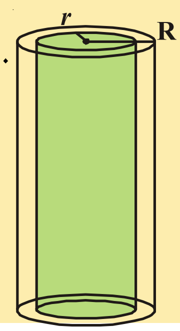
$\therefore$ धातु की मोटाई = R – r = (8 – 5) से.मी. = 3 से.मी.

इन्हें हल कीजिए

1. बेलन की त्रिज्या दुगुना कर इसका वक्रतल का क्षेत्रफल वही रखते हुए, इसकी उँचाई में हुए अंतर को ज्ञात कीजिए । क्या होगा ?
2. एक गर्म पानी के निकाय (गिसर) 14 मी. लम्बाई के और 5 मी. व्यास के बेलनाकर पाईप से बना है। गर्म पानी के निकाय के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

अभ्यास - 10.2

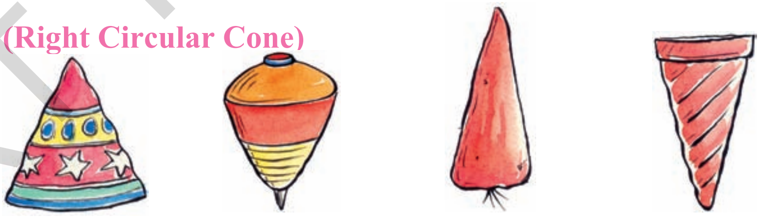
1. एक बंद बेलनाकार टंकी जिसकी उँचाई 1.4 मी. आधार की त्रिज्या 56 से.मी. है, मोटे धातु के चादर (sheet) से बनी है । इसे कितनी धातु की चादर लगेगी? (वर्ग मीटर मे व्यक्त कीजिए)
2. एक बेलन का आयतन 308 से.मी^{3} और उँचाई 8 से.मी. है । इसका वक्र पृष्ठ और संपूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए ।
3. एक 22 से.मी. × 15 से.मी. × 7.5 से.मी. भुजाओं वाले धातु के घनाभ को गलाकर 14 से.मी. ऊँचा बेलन बनाया जाता है । इसकी त्रिज्या क्या हीगी?
4. एक ऊपरी पानी की टंकी बेलनाकार है जिसकी क्षमता 61.6 क्यु. मी. लीटर है । टंकी का व्यास 5.6 मी. है । टंकी की उँचाई ज्ञात कीजिए ।
5. एक धातु की नली 77 से.मी. लम्बी है । इसके अनुप्रस्थ का भीतरी व्यास 4 से.मी. और बाहरी व्यास 4.4 से.मी. (आकृती देखिए) इसको ज्ञात कीजिए।



   (i) भीतरी वक्र धरातल का क्षेत्रफल
   (ii) बाहरी वक्र धरातल का क्षेत्रफल
   (iii) संपुर्ण धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

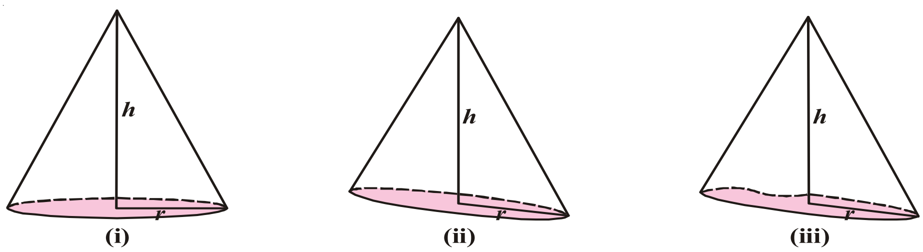
6. एक 56 से.मी. व्यास का बेलनाकार स्तम्भ 35 मी. ऊँचा है। एक इमारत के चारों ओर 16 स्तम्भ है। Rs. 5.50 प्रतिवर्म मी^{2}. की दर से सभी स्तम्भों के पार्श्व धरातल के क्षेत्रफल को रंगने का व्यय ज्ञात कीजिए।
7. एक रोलर का व्यास 84 से.मी. और लम्बाई 120 से.मी. है। एक खेल के मैदान को समतल बनाने के लिए यह 500 परिक्रमा करता है। खेल के मैदान का क्षेत्रफल वर्ग मीटर मे ज्ञात कीजिए।
8. एक वृत्ताकार कूप (कुआँ) का भीतरी व्यास 3.5 मीटर और गहराई 10 मी. है। तो
   (i) इसका भीतरी वक्र धरातल का क्षेत्रफल
   (ii) Rs. 40 प्रती वर्ग मी की दर से इस वक्रपृष्ट को प्लास्टर (पुताई) करने का व्यय ज्ञात कीजिए।
9. ज्ञात कीजिए :
   (i) एक बंद बेलनाकार पेट्रोल संग्रह - टंकी जिसका व्यास 4.2 मी. और उँचाई 4.5 मी. है, टंकी के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल
   (ii) यदि टंकी बनाते समय स्टील की चादर का $\frac{1}{12}$ भाग व्यर्थ हुआ है तो वास्तविक रूप से कितनी चादर का उपयोग हुआ।
10. एक बेलनाकार ड्रम की भीतरी त्रिज्या 28 से.मी. और उँचाई 2.1 मी. है और यह एकओर से खुला है। ड्रम मे तुम कितना पानी संग्रह कर सकते हो। लीटर मे व्यक्त कीजिए। (1 लीटर = 1000 cc.)
11. एक बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल 1760 से.मी.^{2} और आयतन 12320 से.मी.^{3} है। इसकी उँचाई ज्ञात कीजिए।

10.4 लम्ब वृत्तिय शंकु (Right Circular Cone)



ऊपर की आकृतीयों को ध्यान में देखिए और इसका कौनसे ठोस आकार के साथ साम्य पाया जाता है।यह शंकु के आकार मे है।

निम्न शंकुओं को ध्यानपूर्वक देखिए :



(i) इन शंकुओं मे कौन से समान गुणधर्म तुम्हे ज्ञात है?

(ii) तुमने इन शंकुओं मे क्या अंतर पाया?

आकृति (i) मे पार्श्व पृष्ट वक्र है और आधार वृत्ताकार है। शंकु का शीर्ष और वृत्ताकार आधार का केंद्र जोडनेवाला रेखाखण्ड (ऊर्ध्वाधर उँचाई), इसके आधार के अर्धव्यास का लम्ब होता है। इस प्रकार का शंकु, लम्ब वृत्तीय शंकु कहलाता है।

आकृती (ii) में यद्यपि इसका आधार वृत्ताकार है, परन्तु इसकी ऊर्ध्वाधर उँचाई शंकु के अर्धव्यास पर लम्ब नही है।

इस प्रकार के शंकु लम्ब वृत्तीय शंकु नही होते है।

आकृति (iii) में यद्यपि ऊर्ध्वाधर उँचाई, आधार पर लम्ब है परन्तु आधार वृत्ताकार नही है।

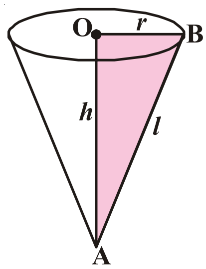
इसलिए यह शंकु, लम्ब वृत्तीय शंकु नही है।

10.4.1 शंकु की तिर्यक उँचाई (Slant Height of the Cone)

संलग्न आकृती (शंकु) में, $\overline{OB}$ पर $\overline{AO}$ लम्ब है।

ΔAOB समकोण त्रिभुज है।

शंकु की उँचाई (h) $\overline{AO}$ है और शंकु का अर्धव्यास (r) $\overline{OB}$ है।



ΔAOB से

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = h^2 + r^2$ (AB तिर्यक उँचाई = l कहलाती है)

$l^2 = h^2 + r^2$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

क्रियाकलाप

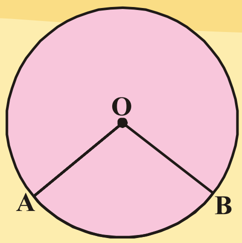
वृत्तखण्ड से शंकु बनाना

सुचनाओं को समझिए और आकृति मे बताये जैसे कीजिए।

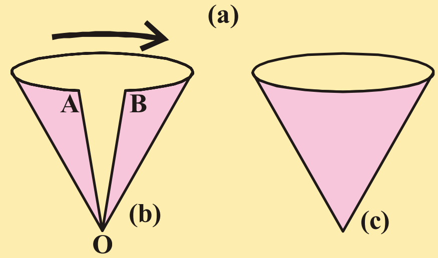
(i) मोटे कागज पर वृत्त बनाईए। आकृति (a)

(ii) इसमे से वृत्तखण्ड AOB काटिए। आकृती (b).

(iii) A, B सिरों के एक दूसरे के नजदीक धीरेसे मोडिए और AB मिलाईए। स्मरण रखिए, A और B एक ऊपर दूसरे से नही ढंकना चाहिए। A, B जोडने पर उन्हे सेलो टैप से चिपकाईए। आकृति (c).



(a)



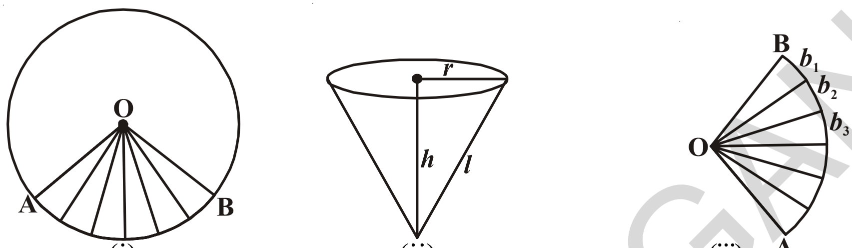
(b) (c)

(iv) कौनसा आकार तुम्हे प्राप्त हुआ?

क्या वह लम्ब वृत्तीय शंकु है?

शंकु बनाते समय 'OA' और 'OB' भुजा का क्या हुआ, ध्यान से देखिए। और वृत्तखण्ड के चाप AB की लम्बाई के भी ध्यानपूर्वक देखिए।

10.4.2 शंकु का वक्रतल का क्षेत्रफल (Curved Surface Area of the Cone)



(i) (ii) (iii)

क्रिया कलाप मे हमने कागज से बनाया हुआ लम्ब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ट ज्ञात करेंगे।

वृतखण्ड के शंकु मे मोडते समय तुमने देखा कि वृतखण्ड के OA, OB एक दूसरे से जुडते है और वह शंकु की तिर्यक उँचाई बनती है, जब कि $\widehat{AB}$ की लम्बाई शंकु के आधार की परिधि होती है।

अब शंकु को खोलिए और वृत्तखण्ड AOB को आकृति मे बताये जैसा जितना तुम कर सकते हो, उतना काटिए। तत्पश्चात तुम देख सकते हो कि काटा हुआ प्रत्येक भाग एक छोटा त्रिभुज है जिसका आधार b_1, b_2, b_3 .... अदि है और उँचाई 'l' तिर्यक उँचाई के बराबर होगी।

यदि हम इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करते है और इन्हे मिलाने पर, यह वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल रहता है। हमे पता है कि वृत्तखण्ड से शंकु बना,

अतः वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल, इससे बनाये गये शंकु के वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

शंकु का क्षेत्रफल = त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \frac{1}{2}b_4 l + ...$$

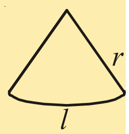
$$= \frac{1}{2}l(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...)$$

$= \frac{1}{2}l$ (A से B तक के वक्रीय भाग की लम्बाई अथवा शंकु के आधार की परिधि)

$= \frac{1}{2}l(2\pi r)$ $\quad (\because b_1 + b_2 + b_3 + ... = 2\pi r$, जहाँ जैसे $\widehat{AB}$ से वृत्त बनता है।

इसकी कोशिश कीजीए

वृत्ताकार कागज के टुकडे से एक 'r' त्रिज्या का वृत्तखण्ड काटिए जिसके चाप की लम्भाई 'l' है। इसे शंकु के आकार मे मोडिए। इसके वक्रपृष्ट के क्षेत्रफल का सूत्र $A = \pi rl$ को तुम कैसे व्युत्पन्न कर सकते हो?



इस तरह शंकु का पार्श्व तलीय क्षेत्रफल अथवा वक्रतल का क्षेत्रफल $= \pi rl$

जहाँ शंकु की तिर्यक उँचाई 'l' और त्रिज्या 'r' है ।

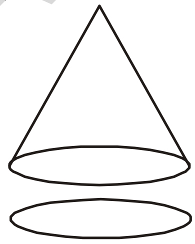
10.4.3 शंकु का संपूर्ण तलीय क्षेत्रफल (Total Surface Area of the Cone)

यदि शंकु के आधार को उसके आकार के रूप मे सम्मिलित करना है, हमे एक वृत्त की आवश्यकता है जिसकी त्रिज्या, शंकु के त्रिज्या के बराबर हो ।

शंकु का संपूर्ण तल कैसे प्राप्त करते है? संपूर्ण तल प्राप्त करने के लिए कितने तल तुम्हे मिलाना होंगे?

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

शंकु का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल = इसके आधार का क्षेत्रफल + वक्र तल का क्षेत्रफल



$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r (l + r)$$

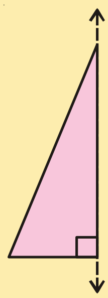
शंकु का संपूर्णतल का क्षेत्रफल= $\boldsymbol{\pi r (l + r)}$

जहाँ शंकु की त्रिज्या 'r' और तिर्यक उँचाई 'l' है ।

प्रयत्न कीजीए

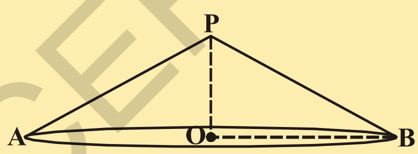
1. एक समकोण काटिए । समकोण बनाने वाली भुजाओं में से किसी एक भुजा के साथ तार बाँधिए, आकृति मे दिखाये जैसे तार के दोनों ओर कसकर तुम्हारे हाथो से पकडिए और निश्चित वेग से घुमाईए ।

   तुम क्या देखते हो?

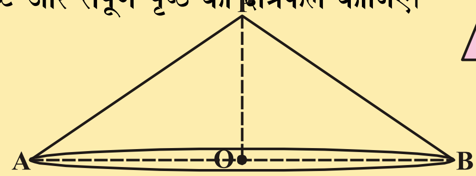


आकृति (i)

2. निम्न में से प्रत्येक लम्ब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ट और संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल कीजिए।

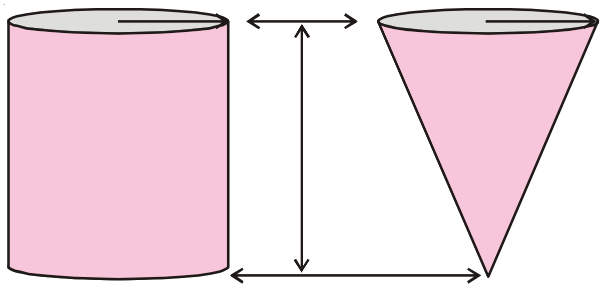


OP = 2 से.मी. OB = 3.5 से.मी.

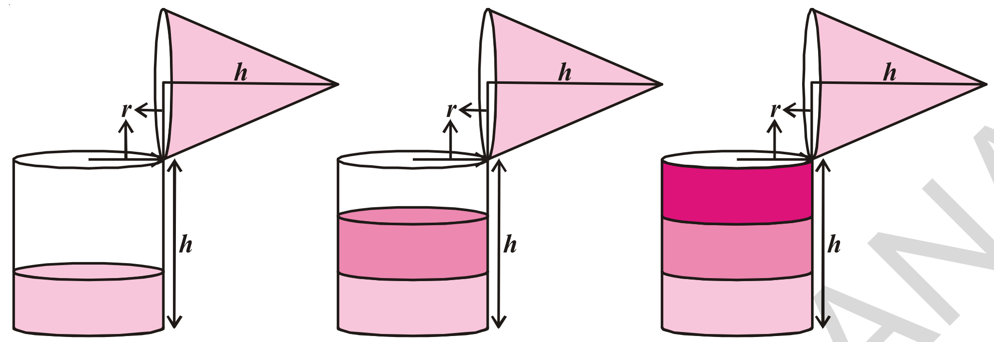


OP = 3.5 से.मी. OB = 10 से.मी.

10.4.4 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन (Volume of a right circular cone)



बराबर (एक समान) अर्धव्यास और उँचाई वाले खोखला बेलन और खोखला शंकु बनाईए और निम्न लिखित प्रयोग कीजिए जो हमे शंकु का आयतन ज्ञात करने में उपयुक्त होगा ।



i. शंकुआकार पात्र मे पानी किनारे तक लबालब भरिए और खोखले बेलन मे उंडेल दीजिए जिस से बेलनाकार पात्र का केवल कुछ भाग भरोगा ।

ii. पुनः शंकु पानी से लबालब भरिए और बेलन मे उंडेलिए, हम देखते है कि अभी भी बेलनाकार पात्र भरा नही ।

iii. जब शंकु तीसरी बार पानी से भरा और बेलनाकार पात्र में रिक्त किया, बेलनाकार पात्र पूर्णतः भरा या नही, ध्यानपूर्वक देखिए ।

ऊपरोक्त प्रयोग से क्या तुम शंकु के आयतन और बेलन के आयतन मे कुछ संबंध ज्ञात करते हो?

हम कह सकते कि तीन बार शंकु का आयतन से बेलन का एक आयतन होता है जब दोनों का एक समान आधार और समान उँचाई होती है ।

अतः शंकु का आयतन, बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है ।

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

जहाँ शंकु के आधार की त्रिज्या 'r' और उँचाई 'h' है ।

उदाहरण-6. एक शकुआकार भुट्टे (आकृति देखिए) के चौडे सिरे की त्रिज्या 1.4 से.मी. और लम्बाई (उँचाई) 12 से.मी. है । यदि भुट्टे के प्रेत्यक 1से.मी.^{2} पृष्ट पर औसत चार मकई के दाने हो तो पूरे भुट्टे पर लगभग कितने दाने होंगे?

हल : यहा $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(1.4)^2 + (12)^2}\, cm.$

$= \sqrt{145.96} = 12.08$ cm. (से.मी.)

इसलिए भट्टे का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 12.08$ से.मी.^{2}

$= 53.15$ से.मी.^{2}

$= 53.2$ से.मी.^{2} (लगभग)

भुट्टे के 1 से.मी.^{2} पृष्ठ पर मकई के दानों की संख्या $= 4$.

इसलिए भट्टे के पूर्ण वक्रीय पृष्ट पर दानों की संख्या

$= 53.2 \times 4 = 212.8 = 213$ (लगभग)

अतः भुट्टे पर मकई के दाने लगभग 213 रहेंगे ।

उदाहरण-7. शंकु का अर्धव्यास 5.6 से.मी. और 158.4 से.मी.^{2} है तो इसकी तिर्यक उँचाई और ऊर्ध्वाधर उँचाई ज्ञात कीजिए ।

हल : अर्धव्यास $= 5.6$ से.मी., ऊर्ध्वाधर उँचाई $= h$, तिर्यक उँचाई $= l$

शंकु का वक्र पृष्ट (CSA) $= \pi r l = 158.4$ से.मी.^{2}

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6} = \frac{18}{2} = 9 \text{ से.मी.}$$

हम जानते है $l^2 = r^2 + h^2$

$$h^2 = l^2 - r^2 = 9^2 - (5.6)^2$$

$$= 81 - 31.36$$

$$= 49.64$$

$$h = \sqrt{49.64}$$

$h = 7.05$ से.मी. (लगभग)

उदाहरण-8. एक तंबू का नीचे का हिस्सा बेलनाकार और ऊपरी भाग शंकु के आकार का है । इसके आधार का व्यास 24 मी. और बेलन की उँचाई 11 मी. तथा शंकु का शीर्ष बेलन से 5 मी. ऊपर है । यदि कैनवस का दर ₹10 प्रति वर्ग मीटर हो तो तंबू बनाने के लिए कितना खर्च होगा?

हल : बेलन के आधार का व्यास = शंकु का व्यास = 24 मी.

$\therefore$ आधार की त्रिज्या $= 12$ मी.

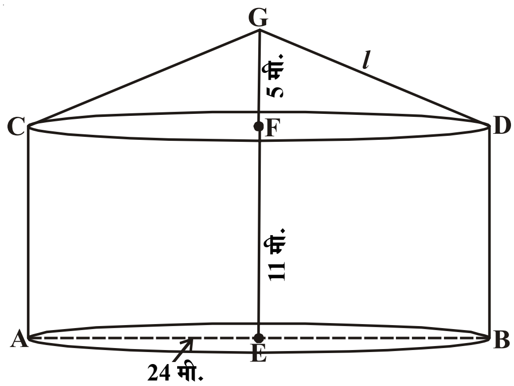
बेलन की उँचाई $= 11$ मी. $= h_1$

शंकु की उँचाई $= 5$ मी. $= h_2$

माना कि शंकु की तिर्यक उँचाई 'l' है ।

l = GD = $\sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{12^2+5^2}$ = 13 मी.

अभीष्ट कैनवस का क्षेत्रफल = बेलन का वक्र तल + शंकु का वक्र तल



$= 2\pi r h_1 + \pi r l$

$= \pi r\,(2h_1 + l)$

$= \frac{22}{7} \times 12(2\times 11+13)$ मी.^{2}

$= \frac{22\times 12}{7} \times 35$ मी.^{2}

$= 22 \times 60$ मी^{2}

= 1320 मी.^{2}

कैनवस कादर = ₹10 प्रती वर्ग मी^{2}

$\therefore$ कैनवस का का मूल्य = दर × कैनवस का क्षेत्रफल

= ₹10 × 1320

= ₹13,200.

उदाहरण-9. शिविर के लिए सेना द्वारा 3 मी. ऊँचा शंकुआकार डेरा खडा किया गया जिसके आधार का व्यास 8 मी. है।

(i) यदि कैनवस का मूल्य ₹ 70 प्रति वर्ग मी 1 हो तो डेरा बनाने के लिए लगनेवाले कैनवस का मूल्य

(ii) यदि प्रत्येक व्यक्ति को 3.5 मी^{3} हवा लगती हो तो डेरे मे कितने व्यक्ति बैठ सकते है?

हल: डेरे का व्यास = 8 मी.

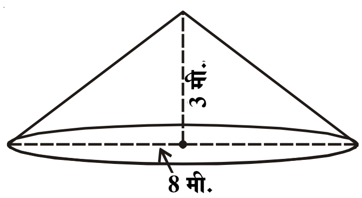
$r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4$ मी.

उँचाई = 3 मी.

तिर्यक उँचाई (l) $= \sqrt{h^2+r^2}$

$= \sqrt{3^2+4^2}$

$= \sqrt{25} = 5$ मी.



$\therefore$ डेरे का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5 = \frac{440}{7}$ मी.^{2}

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$$

$$= \frac{352}{7} \text{ मी.}^3$$

(i) डेरा बनाने के लिए लगने वाले कैनवस का मूल्य

$$= \text{वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल} \times \text{प्रति इकाई मूल्य}$$

$$= \frac{440}{7} \times 70$$

$$= ₹4400$$

(ii) डेरे में बैठ सकने वाले व्यक्तिओं की संख्या

$$= \frac{\text{शंकुआकार डेरे का आयतन}}{\text{प्रत्येक व्यक्ति के लिए लगनेवाली हवा}}$$

$$= \frac{352}{7} \div 3.5$$

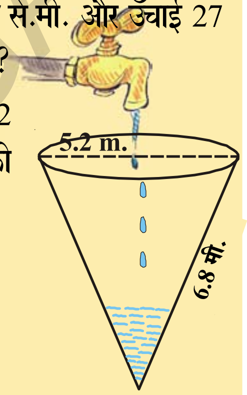
$$= \frac{352}{7} \times \frac{1}{3.5} = 14.36$$

= 14 व्यक्ति (लगभग)

अभ्यास - 10.3

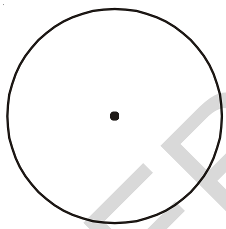
1. एक शंकु के आधार का क्षेत्रफल 38.5 से.मी.^{2} और आयतन 77 से.मी.^{3} है। इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक शंकु का आयतन 462 मी.^{3} और आधार की त्रिज्या 7 मी. है। इसकी उँचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक शंकु का वक्र पृष्ट 308 से.मी.^{2} और तिर्यक उँचाई 14 से.मी. है। ज्ञात कीजिएः
   (i) आधार की त्रिज्या (ii) शंकु का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल
4. एक शंकु के संपूर्णतल के रंगाई का मुल्य, 25 पैसे प्रती से.मी.^{2} की दर से ₹176 लगता है। यदि इसकी तिर्यक उँचाई 25 से.मी. होतो शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।
5. एक 15 से.मी. अर्धव्यास के वृत्त मे से 216° कोण का वृत्तखण्ड काटा गया और इसकी परिबन्ध त्रिज्याओं को शंकु आकार में मोडा गया। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।
6. एक डेरे की उँचाई 9 मी. और आधार का व्यास 24 मी. है। इसकी तिर्यक उँचाई क्या होगी? इसे बनाने के लिए लगनेवाले कैनवस कपडे का मूल्य ज्ञात कीजिए यदी इसका दर ₹14 प्रती वर्ग मीटर है।

7. एक शंकु का वक्र पृष्ट $1159\frac{5}{7}$ से.मी.^{2} और इसके आधार का क्षेत्रफल $254\frac{4}{7}$ से.मी.^{2} है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।
8. एक डेरा 4.8 मी. ऊँचाई तक बेलन के आकार का है और इसके ऊपर शंकु के आकार का है। आधार की त्रिज्या 4.5 मी. और डेरे की कुल उँचाई 10.8 मी. है। डेरा बनाने के लिए कितने वर्ग मी. कैनवस लगेगा, ज्ञात कीजीए।
9. एक 8 मी. ऊँचा और जिसके आधार का आर्धव्यास 6 मी. है ऐसा शंकुआकार तंबू बनाने के लिए 3 मी. चौडाई के कपड़े की कीतनी आवश्यकता होगी? मानिए की किनारों की सिलाई के लिए और कटाई के समय अपव्यय होनेवाला कुल कपडा लगभग 20 से.मी. ($\pi = 3.14$ लीजिए)
10. एक जोकर की टीपी लम्ब वृत्तीय शंकु के आकार की है जिसके आधार की त्रिज्या 7 से.मी. और ऊँचाई 27 से.मी. है। ऐसी 10 टोपियाँ बनाने केलिए कितने क्षेत्रफल का शीट (कपडा) लगेगा ?
11. संलग्न आकृति में बताये जैसा एक शंकुआकार पात्र जिसके आधार का व्यास 5.2 से.मी. तथा उसकी तीर्यक ऊँचाई 6.8 से.मी. है जिसमें 1.8 मी.^{3} प्रती मिनट की दर से पानी गिर रहा है। यह पात्र कितने समय मे भरेगा?



12. दो सादृश शंकु के आयतन 12π घन इकाईयाँ और 96π घन इकाईयाँ है। यदी छोटे शंकु का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 15π वर्ग इकाईयाँ है, तो बडे शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.5 गोला (Sphere)


(i)


(ii)


(iii)

ऊपर की सभी आकृतियों से तुम भली-भांति परिचित हो। क्या तुम इनमे अंतर जानते हो?

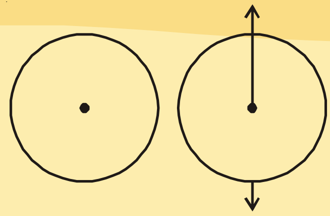
आकृति (i) वृत्त है। इसे तुम आसानी से कागज पर उतार सकते है। क्योंकि यह समतलीय आकृती है।

वृत्त समतलीय बंद आकृती है जिसका प्रत्येक बिंदु किसी निश्चित बिंदु (केंद्र) से समदूरी पर (अर्धव्यास) होता है।

ऊपर की शेष आकृतियाँ ठोस है। ये ठोस आकार मे वृत्ताकार है और यह गोले कहलाते है। गोला एक त्रिविमीय आकृति है जिसके सभी बिंदु अवकाश में रहते है और जो किसी निश्चित बिंदु से, निश्चत दूरी पर रहते है। यह निश्चत बिंदु गोले का केंद्र कहलाता है। गोले के पृष्ट पर स्थित किसी भी बिंदु की केंद्र से दूरी, इसकी त्रिज्या होती है।

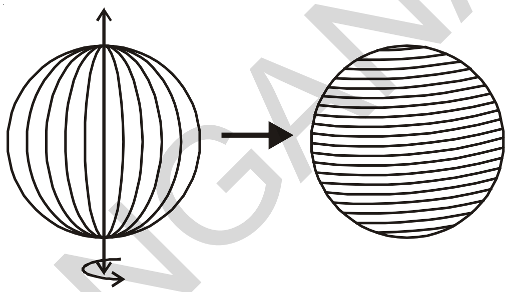
क्रिया कलाप

एक मोटे कागज पर वृत्त खींचिए और इसे निपुणता से काटीए। इसके व्यास के साथ एक तार चिपकाईए अपने हाथों से तार के दोनों सिरे कसकर पकडिए और निश्चित वेग के साथ घुमाईए और इस तरह बनी हुई आकृति को ध्यान से देखिए।



10.5.1 गोले का वक्रधरातल क्षेत्रफल

(Surface Area of a Sphere)



निम्न लिखित क्रिया कलाप द्वारा आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

आकृति मे बताये जैसा टेनिस का गेंद लीजिए और गेंद के चारों ओर तार लपेटिए,तार को स्थान पर रखने के लिए अलपीन का उपयोग कीजिए। तार को प्रारंभिक और अंतिम सिरे को चिन्हित कीजिए। धीरे से गोले के पृष्ठ से तार को निकाल लीजिए।

गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। चित्रों मे बताये जैसे गेंद के त्रिज्या के बराबर त्रिज्या के चार वृत्त बनाईए। गेंद के चारों ओर लपेटे हुए तार से एक के बाद एक वृत्त भरना शुरु कीजिए।

तुम क्या देखते हो?

तार, जो गोले के पृष्ठ पर (गेंद पर) पूर्णरूप से आच्छादित थी, चारों वृत्तों को पूरा भरने के लिए उपयोग मे लायी गई। सभी वृत्तों की त्रिज्या, गोले की त्रिज्या के समान ली गई।

इस से हम समझते है कि त्रिज्या (r) के गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल, त्रिज्या (r) के वृत्त के क्षेत्रफल के चौगुना है।

गोले का वक्रधरातल क्षेत्रफल $= 4 \times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$= 4\pi r^2$

$\therefore$ **गोले का वक्रधरातल क्षेत्रफल** $= 4\pi r^2$

जहाँ गोले की त्रिज्या 'r' है।

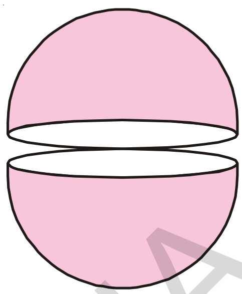
इसकी कोशिश कीजीए

क्या तुम किसी दूसरे विधि से गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते है?

10.5.2 अर्ध गोला (Hemisphere)

एक ठोस गोला लीजिए और इसके केंद्र से गुजरने वाले किसी समतल से काटिए। चित्र की भांति, गोला दो बराबर भागों मे विभाजित होता है। प्रत्येक भाग अर्धगोला कहलाता है।

गोले का केवल एक वक्रतल रहता है । यदि यह दो बराबर भागों मे विभाजित कियागया, तब इसका वक्रीय फलक भी दे बराबर वक्रीय फलकों मे विभाजित होता है ।



अर्ध गोले के वक्र तल का क्षेत्रफल के बारे मे तुम क्या सोचते हो?

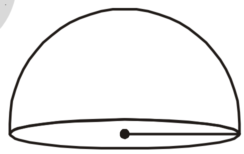
स्पष्टतः,

अर्ध गोले के वक्र धरातल का क्षेत्रफल, गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल के आधे के बराबर है ।

इसलिए अर्ध गोले का वक्र तल $= \frac{1}{2}$ गोले का वक्र पृष्ठ

$$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2\,\pi r^2$$



$\therefore$ **अर्ध गोले का वक्रतल का क्षेत्रफल** $= 2\,\pi r^2$

अर्ध गोले का आधार एक वृत्ताकार क्षेत्र होता है ।

इसका क्षेत्रफल $= \pi r^2$

दोनों, वक्रतल और आधार का क्षेत्रफल का योग करने से, हमें अर्ध गोले का संपूर्ण पृष्ट प्राप्त होता है ।

अर्ध गोले का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल= इसका वक्र पृष्ठ + इसके आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\,\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\,\pi r^2.$$

$\therefore$ **अर्ध गोले का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल** $= 3\pi r^2$.

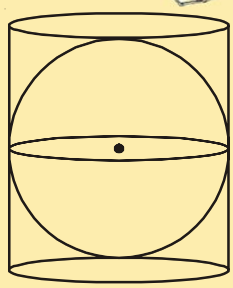
इन्हें हल कीजीए

1. एक लम्ब वृत्तीय बेलन पूर्णतः (just) आबद्ध है ।

   ज्ञात कीजिए (i) गोले का वक्र तल का क्षेत्रफल

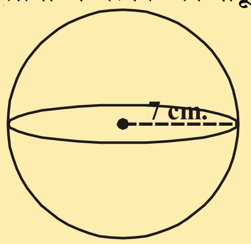
   (ii) बेलन का वक्र तल का क्षेत्रफल

   (iii) (i) और (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों मे अनुपात

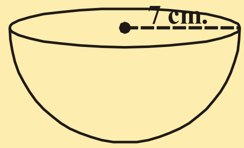


2. निम्न लिखित आकृतियों मे प्रत्येक का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(i)

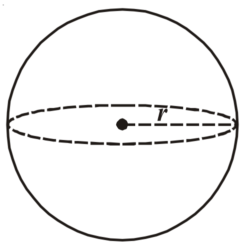


(ii)



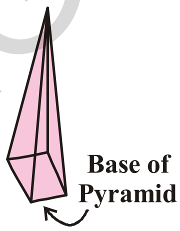
10.5.3 गोले का आयतन (Volume of a Sphere)

गोले का आयतन ज्ञात करने के लिए, कल्पना कीजिए कि गोला, बहुत अधिक संख्या में सर्वांगसम पिरामिड से बना हुआ है, जहाँ सभी पिरामिड के शीर्ष, गोले के केंद्र पर मिलते है जैसे कि आकृति मे दर्शाया है ।



(i)

(ii)



(iii)

निम्न सोपानों को समझिए:

1. आकृति (i) के अनुसार माना कि ठोस गोले की त्रिज्या 'r' है ।
2. कल्पना कीजिए कि त्रिज्या 'r' का गोला, आकृति (ii) मे बताए जैसे बराबर माप के (n) पिरामिडो से बना हुआ है ।
3. इनमे से एक भाग (पिरामिड) लीजिए । प्रत्येक पिरामिड का आधार होता है और माना कि पिरामिड के आधार A_1, A_2, A_3 ..... है ।

   पिरामिड की उँचाई, गोले की त्रिज्या के बराबर होती है, तब

   एक पिरामिड का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार क्षेत्रफल $\times$ उँचाई

   $= \frac{1}{3} A_1 r$

4. जैसे कि कुल पिरामिडों की संख्या 'n' है, तब

   'n' पिरामिडों का आयतन $= \frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \frac{1}{3} A_3 r + \ldots\ldots$ n बार

   $= \frac{1}{3} r [A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots$ n बार$]$

$$= \frac{1}{3} \times A\,r$$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + ...$ n बार
$= $ 'n' पिरामिड के पृष्ठीय क्षेत्रफल

5. ये सभी पिरामिडों के आयतन का योग, गोले के आयतन के बराबर है और सभी पिरामिडों के आधार के क्षेत्रफलों का योग, गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल के निकटतम है। (अर्थात $4\pi r^2$).

इसलिए, गोले का आयतन $= \frac{1}{3}(4\pi r^2)\,r$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ घन इकाईयाँ

$\therefore$ गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

जहाँ गोले का अर्धव्यास 'r' है।

तुम कैसे अर्ध गोले का आयतन ज्ञात करोगे? यह गोले के आयतन के आधा होता है।

$\therefore$ **अर्ध गोले का आयतन** $= \frac{1}{2}$ x गोले का आयतन

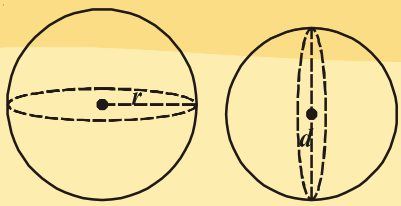
$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

[**संकेत** : तरबुज अथवा इसके जैसे और किसी का उपयोग करते हुए तुम इन सूत्रों को व्युत्पन्न करने की कोशिश कीजिए]

इन्हें हल कीजिए

1. संलग्न आकृतियों मे दिए हुए गोले का आयतन ज्ञात कीजीए।
2. 6.3 से.मी. अर्धव्यास के गोले का आयतन ज्ञात कीजीए।



d = 3 से.मी. d = 5.4 से.मी.

उदाहरण-10. यदि गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 से.मी.^{2}, है तो इसका अर्धव्यास ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$4\pi r^2 = 154 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ से.मी.}$$

उदाहरण-11. एक अर्ध गोलाकार कटोरी पत्थर से बनी हुई है जिसकी मोटाई 5 से.मी. है। यदि भीतरी त्रिज्या 35 से.मी. है, कटोरी का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि बाहरी अर्धव्यास R और भीतरी अर्धव्यास r है।

वलय की मोटाई = 5 सी.मी.

$\therefore$ R = (r + 5) से.मी. = (35 + 5) से.मी. = 40 से.मी.

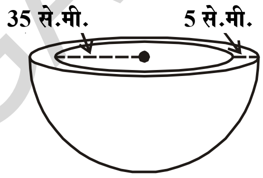
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = बाहरी अर्धगाले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + भीतरी अर्ध गोले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्र फल + वलय का क्षेत्रफल

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= \pi(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$

$\frac{22}{7}(3R^2 + R^2) = \frac{22}{7}(3 \times 40^2 + 35^2)$

$\frac{6025 \times 22}{7} = 18935.91$ से.मी.^{2} (लगभग).



उदाहरण-12. एक भवन के गुम्बद को रंगना है (आकृति 1 देखिए). यदि गुम्बद के आधार की परिधि 17.6 मी. है तो इसको रंगने का खर्च ज्ञात कीजीए यदि रंगने की दर 5 रु. प्रती 100 से.मी.^{2} है।

हल : चूँकि गुम्बद को केवल गोलाकार तल को रंगना है, हमे अर्ध गोले का वक्रिय तल का क्षेत्रफल, जहाँ तक रंगाई करना जरूरी है वहाँ तक, ज्ञात करना आवश्यक है।

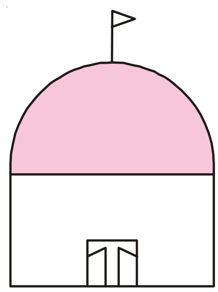
इसलिए, गुम्बद का अर्धव्यास $= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$

$= 2.8$ मी.

गुम्बद का वक्रतल का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$

$= 49.28$ मी.^{2}



आकृति 1

अब, 100 से.मी.^{2} रंगने के लिए खर्च = ₹ 5

इसलिए 1मी.^{2} रंगने के लिए लिए खर्च= ₹ 500

अतः पूर्ण गुम्बद की रंगने के लिए खर्च

= ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24640

उदाहरण-13. एक खोखले गोला, जिसमे सर्कस मोटर साइकिल चालक उसके करतब प्रदर्शित करता हे, का व्यास 7 मी. है। मोटर साइकिल चालक को दौडने के लिए उपलब्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का व्यास = 7 मी. इसलिए, अर्धव्यास 3.5 मी.

अतः मोटर साइकिल चालक को दौडने के लिए उपलब्ध जगह है। गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा और वह,

$$4\pi r^2 = 4\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5 \text{ मी}^2.$$

$$= 154 \text{ मी}^2.$$

उदाहरण-14. एक यूँकी शॉटपुट (गेंद) 4.9 से.मी. अर्धव्यास वाला धातु का बना गोला है। यदि धातु का घनत्व 7.8 ग्राम प्रती से.मी.^{3} है तो शॉटपुट का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : यूँकी शॉटपुट एक धातु का बना टोस गोला है, इसका द्रव्यमान, इसके आयतन और घनत्व के गुणनफल के बराबर होगा। गोले का आयतन ज्ञात करना, हमे आवश्यक है।

अब, गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4.9\times 4.9\times 4.9 \text{ से.मी.}^3$$

$$= 493 \text{ से.मी.}^3 \text{ (निकटतम)}$$

1 से.मी.^{3} धातु का द्रव्यमान 7.8 ग्राम है।

इसलिए, शॉटपुट का द्रव्यमान = 7.8×493 ग्राम

$= 3845.44\text{g} = 3.85$ कि. ग्राम (निकटतम)

उदाहरण-15. एक अर्ध गोलाकार कटोरी का अर्धव्यास 3.5 से.मी. है। कटोरी मे भरे हुए पानी का आयतन ज्ञात कीजिए?

हल : कटीरी मे भरे हुए पानी का आयतन = अर्ध गोले का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5 \text{ से.मी.}^3$$

$$= 89.8 \text{ से.मी.}^3 \text{ (लगभग)}.$$

अभ्यास - 10.4

1. एक गोले का अर्धव्यास 3.5 से.मी. है । इसका पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक गोले का पृष्ठ $1018\frac{2}{7}$ वर्ग से.मी. है । इसका आयतन कीजिए ।
3. मानचित्र (ग्लोब) के भूमध्य विश्व की लम्बई 44 से.मी. है । इसका पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
4. एक गोलाकार गेंद का व्यास 21 से.मी. है । ऐसे 5 गेंद बनाने के लिए कितना चमडा (leather) लगेगा?
5. दो गोलें के त्रिज्याओं मे अनुपात 2 : 3 है । उनके पृष्टें मे और आयतनों मे अनुपात ज्ञात कीजिए ।
6. 10 से.मी. अर्धव्यास के अर्ध गोले का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)
7. एक गोलाकार गुब्बारे का व्यास, उसमे हवा भरने के कारण, 14 से.मी. से to 28 से.मी. बढता है । दोनों स्थितियों मे गुब्बारे के पृष्ठों का क्षेत्रफल मे अनुपात ज्ञात कीजिए ।
8. एक अर्ध गोलाकार पीतल की कटोरी 0.25 से.मी. मोटाई की बना है । कटोरी की भीतरी त्रिज्या 5 से.मी. है । कटोरी के बाहरी पृष्ठ और भीतरी पृष्ठ मे अनुपात ज्ञात कीजिए ।
9. एक शीश के गेंद का व्यास 2.1 से.मी. है । उपयोग मे लाये हुए शीशे का घनत्व 11.34 ग्राम प्रति से.मी.^{3} है । गेंद का वजन क्या होगा?
10. एक 5 से.मी. व्यास और $3\frac{1}{3}$ से.मी. ऊँचे धातु को बेलन के रूप में उसे गोले मे ढाला गया । गोले का व्यास क्या होगा?
11. 10.5 से.मी. व्यास के अर्ध गोलाकार बर्तन में कितने लीटर दूध रख सकते है ।
12. एक अर्ध गोलाकार कटोरी का व्यास 9 से.मी. है । 3 से.मी. व्यास और 3 से.मी. ऊँचाई वाले बेलनाकार बोतल में द्रव पदार्थ उंडेला गया । यदि द्रव पदार्थ से पूर्ण रूप से भरी हुई कटोरी से द्रव बोतल मे उंडेला गया तो कितनी बोतलो की आवश्यकता होगी।

हमने क्या सीखा?

1. घनाभ और घन यह नियमित सम पार्श्व (प्रिज्म) है जिसके 6 फलकोंमे से 4 पार्श्व फलक और आधार और शिर्ष रहते है ।
2. यदि घनाभ की लम्बाई l, चौडाई 'b' और उँचाई 'h' है तब

   घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\,(lb + bh + lh)$

   घनाभ का पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\,h\,(l + b)$

   घनाभ का आयतन $= lbh$

3. यदी घन के कोर की लम्बाई 'l' इकाईयाँ है, तब

 घन का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 6l^2$

 घन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4l^2$

 घन का आयतन $= l^3$

4. पिरामिड का आयतन, लम्ब प्रिज्म के आयतन का एक तिहाई रहता है यदि दोनों के आधार और उँचाई एक समान है ।

5. बेलन एक ठोस है जिसमे वक्रीय पृष्ट के साथ दो वृत्ताकार सिरे रहते है ।

6. यदि लम्ब वृतीय बेलन का अर्धव्यास 'r' और उँचाई 'h' है तब,
 - बेलन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
 - बेलन का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(r + h)$
 - बेलन का आयतन $= \pi r^2h$

7. शंकु एक ज्यामितीय आकार की वस्तु है जिसमे आधार एक वृत्त है और ऊपरी सिरे पर शीर्ष है । यदि आधार के केंद्र और शीर्ष को जोडनेवाला रेखाखण्ड आधार पर लम्ब हो तो यह लम्ब वृत्तीय शंकु कहलाता है ।

8. शंकु के वृत्ताकार आधार पर स्थित किसी भी बिंदु से जोडनेवाली रेखा की लम्बाई, तिर्यक उँचाई (l) कहलाता है ।

 $l^2 = h^2 + r^2$

9. यदि शंकु का अर्धव्यास 'r' , उँचाई 'h' , तिर्यक उँचाई 'l' है तब,
 - शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi rl$
 - शंकु का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r\,(r + l)$

10. यदि बेलन और शंकु का समान आधार और समान उँचाई हो तब, शंकु का आयतन, बेलन के आयतन के एक तिहाई रहता है । अर्थात्

 शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2h.$

11. गोला एक बनायी हुई ज्यामितीय वस्तु है जहाँ अवकाश मे एक निश्चित बिंदु से, सभी बिंदुओं का समुच्चय सम दूरी पर रहते है । निश्चित बिंदु, गोले का केंद्र कहलाता है और निश्चित दूरी, गोले का अर्धव्यास कहलाती है ।

12. यदि गोले का अर्धव्यास ‘r’ है तब,

- गोले का पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$
- गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

13. गोले के केंद्र से गुजरने वाला कोई समतल गोले को दो समान (बराबर) भागों मे विभाजित करता है, प्रत्येक भाग अर्ध गोला कहलाता है ।

- अर्ध गोले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi r^2$
- अर्ध गोले का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $3\pi r^2$
- अर्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$

क्या तुम जानते हो ?

8×8 जादूई वर्ग बनाना

बाँये आकृती मे समझाए जैसे, वर्गाकार ग्रिड मे, केवल 1 से 64 तक की संख्याएं अनुक्रम के रखिए । संकेतानुसार रेखा से चिन्हित कीजिए । नीचे का जादूई वर्ग प्राप्त करने के लिए रेखापर चिन्हित कोई भी अंक, उसके पूरक अंक के स्थान अदल-बदल कीजिए । (जादूई वर्ग के दो अंक पूरक कहलाते है यदि जादूई वर्ग के न्यूनतम और अधिक तम अंको के योग के समान इन दो अंको का योग होता है ।)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	48	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

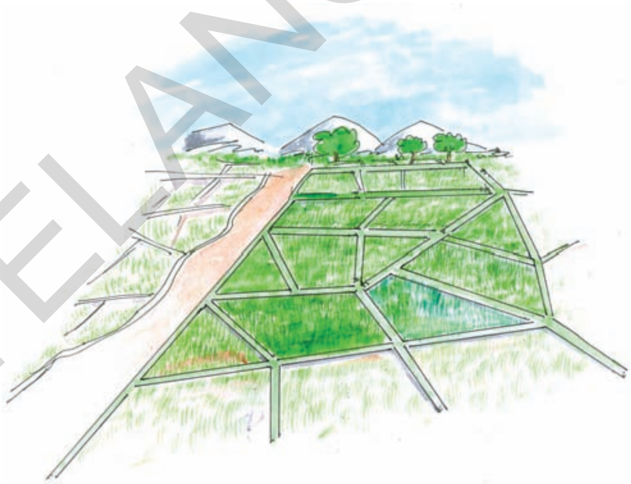
* जादूई वर्ग एक अंको की वर्ग के आकार में (array) है जिसमे प्रत्येक पंक्ति और स्तंभ के अंको का योग समान होता है । ऐसे और जादूई वर्गों को बनाने का प्रयत्न कीजिए।

11

क्षेत्रफल
(AREAS)

11.1 प्रस्तावना :

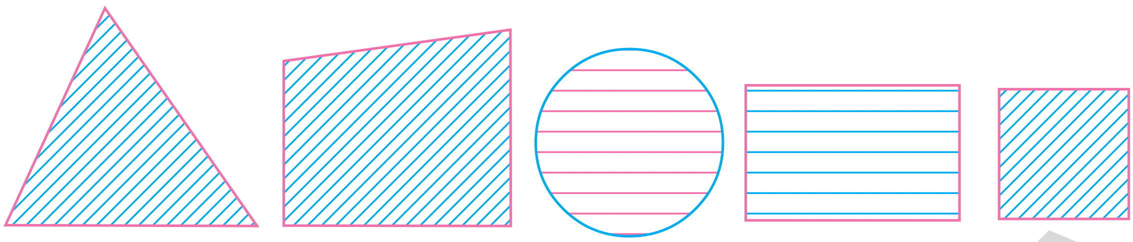
क्या तुमने अपने गाँव या शहर के चारों ओर कृषि उपयोगी क्षेत्र देखे है? जमीन बहुत से किसानों के बीच विभाजित रहती है और अनेक भाग रहते है। क्या सभी समान आकार और समान नापों के रहते है? क्या उनका क्षेत्रफल समान रहता है? यदि वे बराबर क्षेत्रफल चाहते है तो वे क्या कर सकते है? कैसे एक किसान उर्वरक की मात्रा अथवा खेत के लिए आवश्यक बीज का आकलन करता है? क्या इस संख्या का सम्बन्ध, खेत के विस्तार से है?



ज्यामिती के अभ्यास के आरंभ के लिए सबसे पहले और सबसे प्रमुख कारण कृषि संबंधित संख्याएँ है। इसमे जमीन का नापना, इन्हे उपयुक्त भागों मे विभाजित करना, खेत की सीमाएँ सुविधा के अनुसार बनाना, आदि सम्मिलित है। इतिहास में तुमने नील नदी (इजिप्त) की बाढ और ततूपश्चात् जमीन का सीमा अंकन सुना होगा। इनमेसे कुछ क्षेत्र के आधारभूत आकारों मे समानता है जैसे वर्ग, आयत, समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज आकारों के लिए, हम कुछ नियम ज्ञात करेंगे जिसके लम्बाईयों और नापों का उपयोग करते हुए हमे क्षेत्रफल प्राप्त होगा। इस अध्याय में हम इनमे से कुछ आकारो का उपयोग करते हुए हमें क्षेत्रफल प्राप्त करेंगे। इस अध्याय में हम इनमे से कुछ नियमों का अभ्यास करेंगे। हम सिखेंगे कि कैसे, कुछ सूत्रोंका उपयोग करते हुए त्रिभुज, वर्ग, आयत, चतुर्भुज के क्षेत्रफलों को कैसे व्यूत्पन्न किया जायेगा? क्षेत्रफल का अर्थ क्या है? इन की हम चर्चा करेंगे।

11.2 समतलीय क्षेत्रों का क्षेत्रफल (Area of Plane Circles)

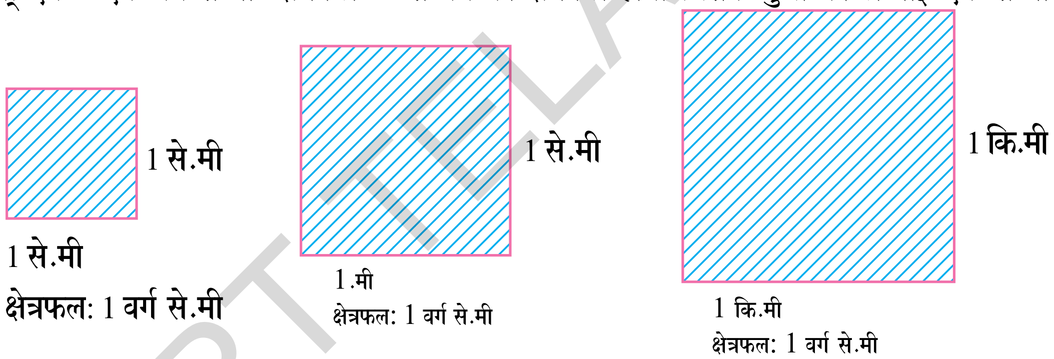
याद कीजिए कि साधारण बंद आकृति द्वारा घिरे तल का भाग उस आकृति के अनुकुल तलीय क्षेत्र कहलाता है। इस तलीय क्षेत्र का परिमाणों का गुणनफल ही उसका क्षेत्रफल रहता है ।



त्रिभुजाकार क्षेत्र चतुर्भुज क्षेत्र वृत्ताकार क्षेत्र आयताकार क्षेत्र वर्गाकार क्षेत्र

एक समतलीय क्षेत्र, परिसीमा और आंतरिक क्षेत्र से बना है। इसका क्षेत्रफल हम कैसा नापते है? इन क्षेत्रों के नाप का परिमाण हमेशा वास्तविक धन संख्या (क्षेत्रफल का कोई मात्रक) मे व्यक्त करते है जैसे 10 सी.मी^{2}, 215 मी^{2}, 2 कि.मी^{2}, 3 हेक्टर्स , आदि। इसलिए हम कह सकते है कि किसी आकृति का क्षेत्रफल वह संख्या (क्षेत्रफल के किसी मात्रक मे) है तो आकृति द्वारा घिरे समतल के साथ सम्बद्ध रखती है।

''एक इकाई क्षेत्रफल'' उस वर्ग का क्षेत्रफल होगा जिसकी भुजा की लम्बाई एक इकाई होगी । अर्थात् एक ''एक वर्ग से.मी. क्षेत्रफल'' उस वर्ग का क्षेत्रफल होगा जिसके भुजा की लम्बाई एक से.मी. होगी।

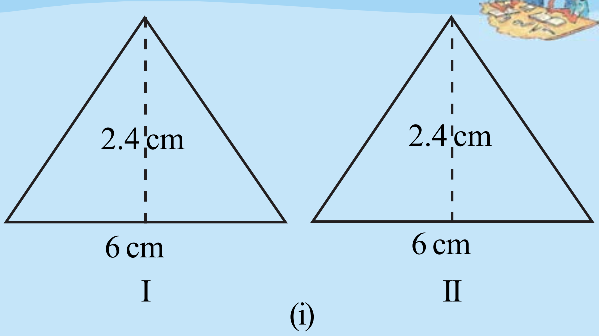


पद वर्ग मीटर| (1मी^{2}), वर्ग कि.मी(1कि.मी^{2}), वर्ग मि.मि (1मि.मी.^{2}) यह एक ही आशय से लेने चाहिए. वर्ग कक्षाओं से हम सर्वांगसम अनिवृतियों की संकल्पना से सुपरिचित है। दो आकृतियाँ सर्वागसम रहती है यदि उनका आकार एक समान और उनका समान माप होता है ।

क्रिया कलाप

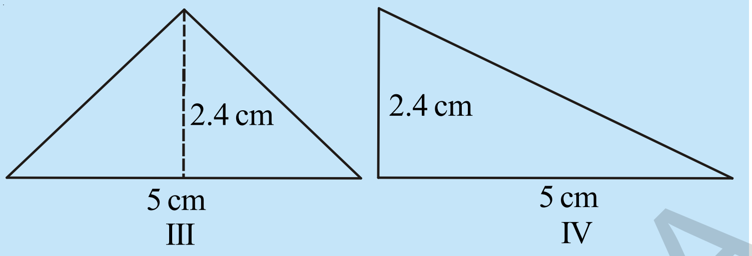
आकृति I और II. को ध्यानपूर्वक देखिए। दोनों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या इन के क्षेत्रफल बराबर है ?

कागज के टूकडे पर इन आकृतियों को बनाईए और इन्हे काटिए । आकृति I को आकृति II से ढंकिए । क्या वे एक दूसरे को पूर्णतः ढंकते है? क्या वे सर्वागसम है ।

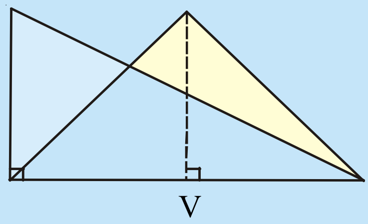


आकृति III और IV को ध्यानपूर्वक देखिए। दोनों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। तुम क्या देखते हो?

क्या वे सर्वांगसम है?

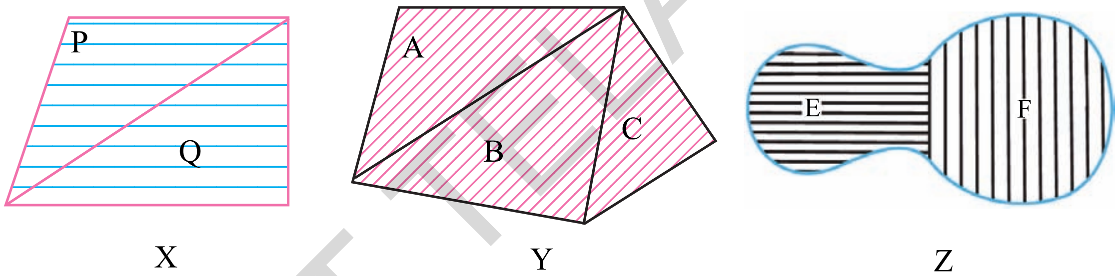


अब, इन आकृतियों को कागज के टूकडे पर बनाईए और इन्हे काटिए। इनके आधार को एक के ऊपर एक रखते हुए (भुजा की समान लम्बाई) आकृति III को आकृति IV से ढंकिए ।



आकृति V मे दिखाए जैसा क्या वे पूर्णतः ढंकी हुई है? हम निष्कर्ष लेते है कि आकृतियाँ I और II सर्वांगसम और क्षेत्रफल में बराबर है। परंतु आकृतियाँ III और IV क्षेत्रफल में बराबर है किन्तु सर्वागसम नहीं है।

अब, निम्न आकृतियों के बारे में सोचिए।



तुम देख सकते हो कि आकृतियाँ X, Y, Z के तलीय क्षेत्र, दो अथवा अधिक तलीय क्षेत्रों से बने है। हम आसानी से देख सकते है कि

आकृति X का क्षेत्रफल = आकृति P का क्षेत्रफल + आकृति Q का क्षेत्रफल

इसी प्रकार, (Y) का क्षेत्रफल = (A) का क्षेत्रफल +(B) का क्षेत्रफल + (C) का क्षेत्रफल

(Z) का क्षेत्रफल = (E) का क्षेत्रफल + (F) का क्षेत्रफल

इस तरह, आकृति का क्षेत्रफल (किसी मात्रक मे) निम्न लिखित गुणधर्मो के साथ आकृति द्वारा घिरे समतल के भाग के साथ सम्बद्धी होता है।

(**नोटः** आकृति (X) के क्षेत्रफल को हम संक्षिप्त रूप मे क्षेत्र (X) का उपयोग करते है ।)

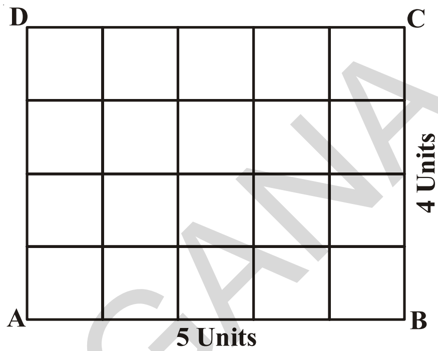
(i) दो सर्वसमान आकृतियों का क्षेत्रफल बराबर रहता है ।

A और B दो सर्वसमान आकृतियाँ हैं, तब क्षेत्र (A) = क्षेत्र (B)

(ii) आकृति का क्षेत्रफल उसके सभी भागों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है। यह आकृति P और Q द्वारा बना है, तब क्षेत्र (X) = क्षेत्र (P) + क्षेत्र (Q).

11.3 आयत का क्षेत्रफल (Area of Rectangle)

यदि किसी आयत की लम्बाई मे इकाईयों की संख्या को इसकी चौडाई में इकाईयों की संख्या से गुणा किया गया तो गुणनफल, आयत के क्षेत्रफल में वर्ग इकाई की संख्या देता है।

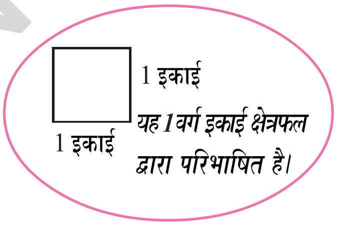


माना कि ABCD एक आयत को निर्देशित करता है जिस की लम्बाई AB 5 इकाईयाँ और चौडाई BC 4 इकाईयाँ है।

AB को 5 समान भागों ने और BC को 4 समान भागों मे विभाजित कीजिए और विभाजक बिंदु से प्रत्येक रेखा दूसरी रेखा को समानांतर खींचिए। आयत में प्रत्येक डिब्बा एक वर्ग इकाई को निर्देशित करता है (क्यों?)

$\therefore$ आयत में (5 इकाईयाँ $\times$ 4 इकाईयाँ). अर्थात 20 वर्ग इकाईयाँ है।

इसी प्रकार, यदि लम्बाई 'a' इकाईयाँ और चौडाई 'b' इकाईयाँ है तो आयत का क्षेत्रफल 'ab' वर्ग इकाईयाँ होगा। अर्थात ''लम्बाई$\times$ चौडाई'' वर्ग इकाईयाँ, आयत का क्षेत्रफल देता है ।

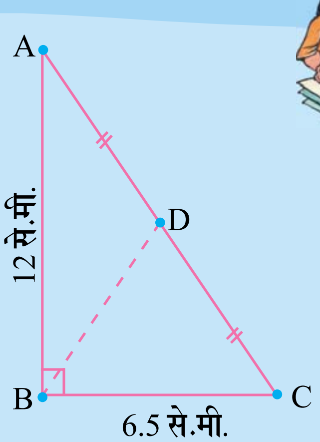


11.3 आयत का क्षेत्रफल :

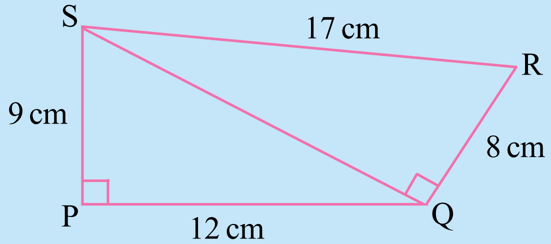
1. यदि 1 से.मी, 5. मी. के बराबर है, तो ६ वर्ग से.मी. किसके बराबर है ।
2. रजनी ने कहा 1 वर्ग मी $= 100^2$ वर्ग से.मी, क्या तुम सहमत हो? स्पष्ट कीजिए ।

अभ्यास -11.1

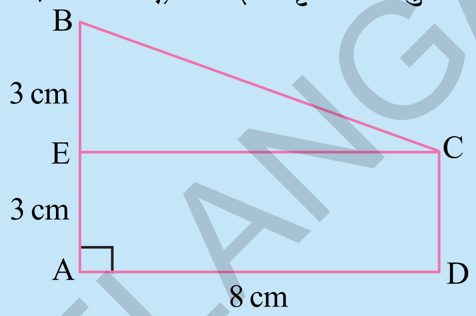
1. ΔABC में, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = DC$, $AB = 12$ से.मी और $BC = 6.5$ से.मी. ΔADB को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



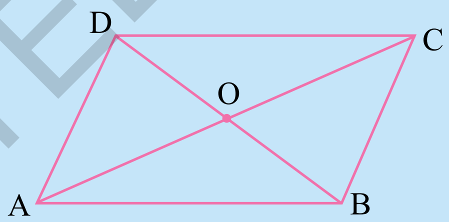
2. चतुभुर्ज PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमे $\angle QPS = \angle SQR = 90°$, PQ = 12 से.मी, PS = 9 से.मी, QR = 8 से.मी और SR = 17 cm (**संकेत:** PQRS के दो भाग है)



3. समलंब चतुभुर्ज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, दी गई आकृति के अनुसार ADCE आयत है। (**संकेत:** ABCD के दो भाग है ।)

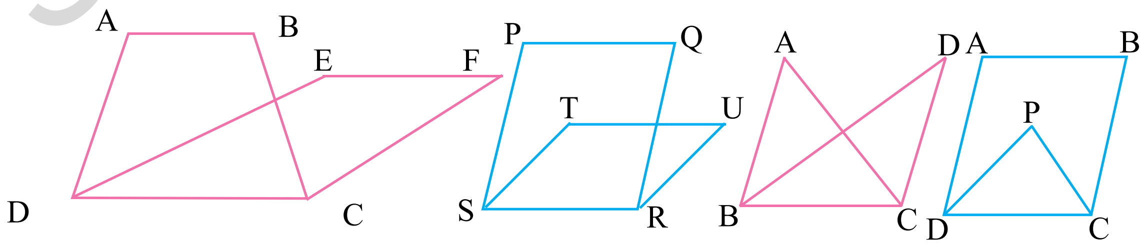


4. ABCD समांतर चतभुर्ज है। कर्ण AC और BD एक दूसरेको 'O' पर प्रतिच्छेदित करते है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र (ΔAOD) = क्षेत्र(ΔBOC). (**संकेत:** सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते है)



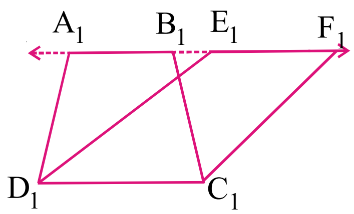
11.4 एक ही आधार पर और दो समान सामानांतर रेखाओं के बीच की आकृतियाँ:

अब हम एक ही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच की कुछ ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफलों मे संबंधोका अभ्यास करेंगे। यह अभ्यास हमे त्रिभुजों के समरूपता के कुछ परिणामों को समझने मे उपयुक्त होंगे। निम्न आकृतियोंकी ओर ध्यान से देखिए।

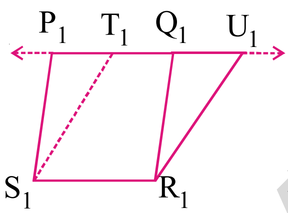


(i) (ii) (iii) (iv)

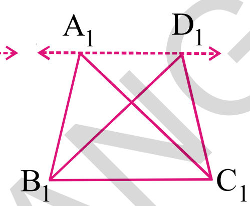
आकृति (i) समलम्ब चतुभुर्ज ABCD और समांतर चतुभुर्ज EFCD में उभयनिष्ठ भुजा CD है। हम कहते है कि समलंब चतुभुर्ज ABCD और समांतर चतुभुर्ज EFCD दोनो एक ही आधार CD पर स्थित है। इसी प्रकार आकृति (ii) में, समांतर चतुभुर्ज PQRS और समांतर चतुभुर्ज TURS का आधार समान है। आकृति (iii) त्रिभुजों मे ABC और DBC त्रिभुजों का आधार BC है। आकृति (iv) मे समांतर चतुभुर्ज ABCD और त्रिभुज PCD दोनो DC पर स्थित है। अतः, ये सभी आकृतियाँ ज्यामितीय आकार की है और इसलिए एकही आधार पर है। परन्तु वे समान समानान्तर रेखाओं के बीच नही है क्यों कि AB और EF परस्पर व्यापी (overlap) नही है और PQ और TU परस्पर व्यापी नही है। और न तो बिंदु A, B, E, F संरेखी है न बिंदु P, Q, T, U संरेखी है। आकृति (iii) और आकृति (iv) के बारे मे तुम क्या कह सकते हो ? अब, निम्न आकृतियों को ध्यानपूर्वक देखिए।



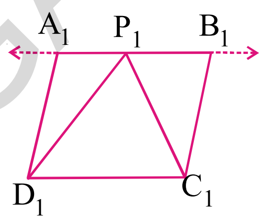
(v)



(vi)



(vii)



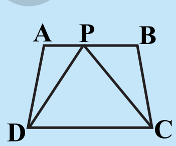
(viii)

तुमने आकृतियोंके बीच क्या अंतर देखा ? आकृति (v) में, हम कहते है कि समलंब चतुर्भुज $A_1B_1C_1D_1$ और समांतर चतुभुर्ज $E_1F_1C_1D_1$ एक ही आधार और समान समांतर रेखाएँ A_1F_1 और D_1C_1। के बीच स्थित है। बिन्दु A_1, B_1, E_1, F_1 संरेखी हैं और $A_1F_1 \parallel D_1C$। इसी प्रकार आकृति (vi) में, समांतर चतुभुर्ज $P_1Q_1R_1S_1$ और $T_1U_1R_1S_1$ एकही आधार S_1R_1 और वही समांतर रेखाओं और समान समांतर भुजाओं के बिचमे स्थित हैं।अतः दो आकृतियाँ एकही आधार और दो समानांतर रेखाओं के बीच में है, ऐसा कहलाती है, यदि इनमें उभयनिष्ठ भुजा (आधार) हो और प्रत्येक आकृति के उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत शीर्ष, एकही रेखा पर स्थित होते है जो आधार के समांतर होती है ।

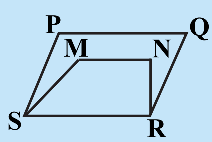
विचार-विमर्श कीजिए।

निम्न में से कौनसी आकृतियाँ एक ही आधार पर और एक समान समांतर रेखाओं के बीच है ?

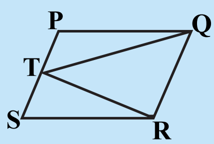
निम्न स्थितियों मे, उभयनिष्ठ आधार और दो समानांतर रेखाओं को लिखिए ।



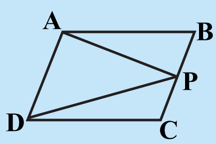
(a)



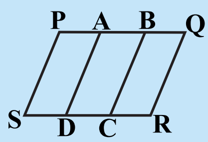
(b)



(c)



(d)



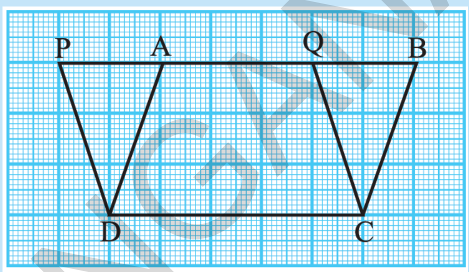
(e)

11.5 एकही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच समांतर चतुभुर्ज

अब हम दो समांतर चतुर्भुज जो एक ही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच में है, उनके क्षेत्रफलों के मध्य यदि कोई संबंध हो तो ज्ञात करने की कोशिश करेंगे ।

क्रियाकलाप

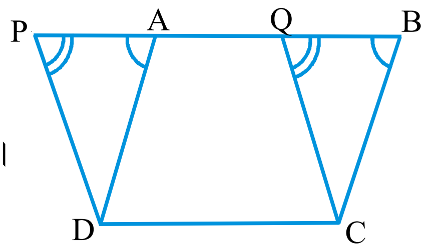
एक आरेख कागज लीजिए और आकृति में दर्शाए जैसे दो समांतर चतुभुर्ज ABCD और PQCD उसपर खींचिए ।



समांतर चतुभुर्ज एक ही आधार DC समान समानांतर रेखाओं के बीच मे है। स्पष्टतः दोनों समानान्तर चतुर्भुज में भाग DC QA उभयनिष्ठ है। यदि हम बता सकते है कि ΔDAP और ΔCBQ का क्षेत्रफल समान है तो हम कह सकते कि क्षेत्र (PQCD) = क्षेत्र (ABCD).

प्रमेय-11.1 : समान आधार और समान समानांतर रेखाओं के बीच के समांतर चतुभुर्ज का क्षेत्रफल बराबर होता है।

उपपत्ति: माना कि एक ही आधार DC पर और समानांतर रेखाएँ DC और PB के बीच ABCD और PQCD दो समांतर चतुभुर्ज है। ΔDAP और ΔCBQ



$PD \parallel CQ$ और PB तिर्यक रेखा है। $\angle DPA = \angle CQB$

और $AD \parallel CB$ और PB तिर्यक रेखा है। $\angle DAP = \angle CBQ$

तथा $PD = QC$ चूँकि PQCD समांतर चतुभुर्ज है।

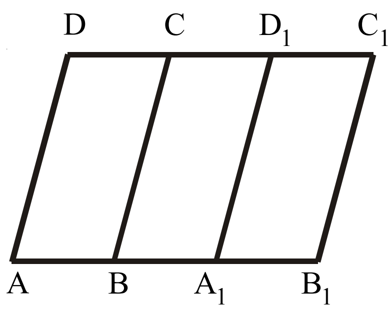
अतः ΔDAP और ΔCBQ सर्वांगसम है और बराबर क्षेत्रफल के है।

इसलिए हम कह सकते,

क्षेत्र (PQCD) = क्षेत्र (AQCD) + क्षेत्र (DAP)

= क्षेत्र (AQCD) + क्षेत्र (CBQ) = क्षेत्र (ABCD)

चूँकि यह आरेख कागज पर खींचा गया है, इन समांतर चतुर्भुज के वर्गों की गणना द्वारा तुम जाँच कर सकते है ।



क्या तुम स्पष्ट कर सकते हो कि कैसे आरेख के पूर्ण वर्ग, आधे से अधिक वर्ग और आधे से कम वर्गों की गणना कैसे की जाती है? रेशमा ने तर्क किया कि समान समांतर रेखाओं के बीच के समांतर चतुभुर्ज के बराबर क्षेत्रफल के लिए, एक ही आधार होना आवश्यक नही है। केवल उनका आधार बराबर रहना चाहिए । उसका कथन समझने के लिए संलग्न आकृति की ओर ध्यान से देखिए ।

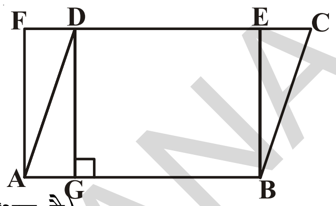
यदि $AB = A_1B_1$ जब हम समान्तर चतुभुर्ज $A_1B_1C_1D_1$ काटकर उसे समान्तर चतुभुर्ज ABCD पर रखेंगे तो A बिन्दु A_1 के साथ सम्पाती होता है, और B बिन्दू B_1 और C_1D_1 सम्पाती होते है CD इस तरह क्षेत्रफल में बराबर है। इस तरह वह क्षेत्रफल में बराबर है ।

इस तरह बराबर आधार के समांतर चतुर्भुज को, उनके ज्यामितीय गुणधर्मों के अभ्यास हेतु एक ही आधार पर स्थित समझ सकते है। ऊपर के प्रमेय का उपयोग समझने के लिए अब हम कुछ उदाहरणों को प्रस्तुत करें गे।

उदाहरण -1. ABCD समांतर चतुर्भुज और ABEF आयत है। AB पर लम्ब DG है।

सिद्ध कीजिए कि (i) क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र (ABEF)

(ii) क्षेत्र (ABCD) = AB $\times$ DG



हल : (i) एक आयत भी एक समांतर चतुर्भुज होता है ।

$\therefore$ क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र (ABEF) ..... (1)

(समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और समान समानान्तर रेखाओं के बीच स्थित है)

(ii) क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र (ABEF) ($\because$ (1) से)

= AB $\times$ BE ($\because$ ABEF आयत है)

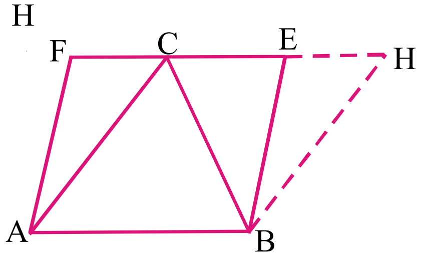
= AB $\times$ DG ($\because$ DG $\perp$ AB और DG = BE)

इसलिए क्षेत्र (ABCD) = AB $\times$ DG

परिणाम से हम कह सकते है कि ''समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसकी कोई भी भुजा और उसके अनुकूल ऊँचाई का गुणनफल होता है।''

उदाहरण-2. त्रिभुज ABC और समांतर चतुर्भुज ABEF एकही आधार पर है तथा AB और EF समानांतर भुजाओं के बीच मे स्थित है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र (ΔABC) = $\frac{1}{2}$ar(|| gm ABEF)

हल : B से गुजरनेवाली BH || AC खींचिए जो बढाई गई FE को H पर स्पर्श करती है



$\therefore$ ABHC समांतर चतुर्भुज है ।

कर्ण BC इसे दो सर्वसमान त्रिभुजों मे विभाजित करता है।

$\therefore$ क्षेत्र(ΔABC) = क्षेत्र(ΔBCH)

$= \frac{1}{2}$ar (|| gm ABHC)

किन्तु समानांतर चतुर्भुज ABHC और समांतर चतुर्भुज ABEF एकही आधार AB पर और समान समांतर रेखाओं AB और EF के बीच में स्थित है ।

$\therefore$ क्षेत्र(समांतर चतुर्भुज ABHC) = क्षेत्र (समांतर चतुर्भुज ABEF)

अतः क्षेत्र (ΔABC) = $\frac{1}{2}$ar (|| gm ABEF)

परिणाम द्वारा हम कहते है कि ''एक ही आधार पर और समान समांतर रेखाओं के बीच मे स्थित का त्रिभुज का क्षेत्रफल, समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।''

उदाहरण-3. एक समचतुर्भुज के कर्ण 12 से.मी और 16 से.मी. है। इसके आसन्न भुजाओं के मध्यबिंदुओं को जोडने पर बननेवाली आकृति का क्षेत्रफल ज्ञाज कीजिए ।

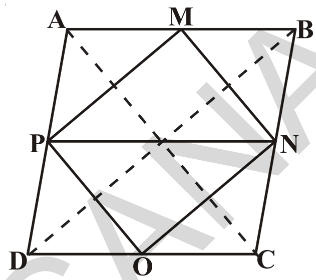
हलः समचतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB, BC, CD, DA के मध्यबिंदु क्रमशः M, N, O और P है। आकृति MNOP बनाने के लिए इन्हे मिलाईए।

इस तरह बने हुए MNOP का आकार क्या होगा? कारण दीजिए?

रेखा PN मिलाईए तब PN || AB और PN || DC (कैसे?)

हम जानते है कि यदि एक त्रिभुज और समानांतर चतुर्भुज एकही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल, सामांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के आधा होता है।

ऊपर के परिणाम से, समान्तर चतुर्भुज ABNP और त्रिभुज MNP एक ही आधार PN पर और समांतर रेखाओं PN और AB के बीचमे हैं ।



$\therefore$ क्षेत्र $\Delta MNP = \frac{1}{2}$ क्षेत्र ABPN .....(i)

क्षेत्र $\Delta PON = \frac{1}{2}$ क्षेत्र (PDCN) .....(ii)

और समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ .....(iii)

(1), (ii) और (iii) से हमे ज्ञात होता है

क्षेत्र(MNOP) = क्षेत्र(ΔMNP) + क्षेत्र(ΔPON)

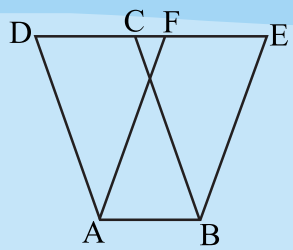
$= \frac{1}{2}$ क्षेत्र(ABNP) + $\frac{1}{2}$ क्षेत्र(PDCN)

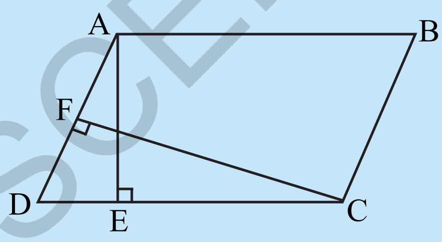
$= \frac{1}{2}$ क्षेत्र(समचतुर्भुज ABCD)

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right)$ = 48 सेमी.^{2}

अभ्यास 11.2

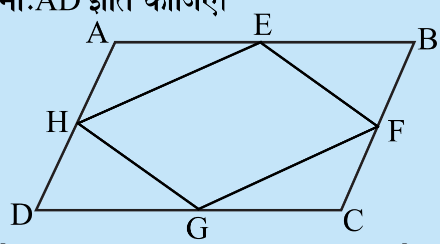
1. समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 36 से.मी^{2}. है। समांतर चतुर्भुज ABEF के ऊँचाई की गणना कीजिए यदि AB = 4.2 से.मी..





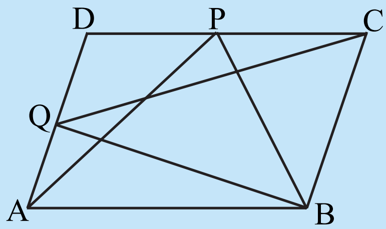
2. ABCD समान्तर चतुर्भुज है। AE, DC पर लम्बा है। और CF पर लम्ब है ।

यदिAB = 10 से.मी. तो AE = 8 से.मी. और CF = 12 से.मी.AD ज्ञात कीजिए।



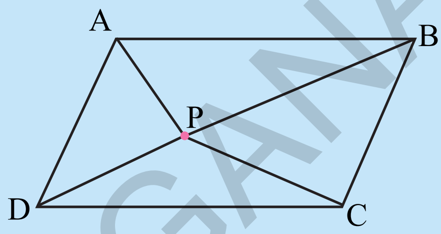
3. समांतर चतुर्भुज AB, BC, CD और AD के मध्यबिंदू क्रमशः E, F G और H है। बताईए कि क्षेत्र (EFGH) $= \frac{1}{2}$ar(ABCD)

4. . उदाहरण-3, मे यदि तुम ΔAPM, ΔDPO, ΔOCN और ΔMNB को मिलाने पर तो तुम्हे कौनसी आकृति प्राप्त होगी?



5. ABCD समांतर चतुभुर्ज की DC और AD भुजाओं पर क्रमशः कोई दो बिंदु P और Q स्थित है। बताईए कि क्षेत्र (ΔAPB) = क्षेत्र $\Delta(BQC)$.

6. समांतर चतुभुर्ज ABCD के भीतरी भाग मे बिंदु P है। बताईए कि

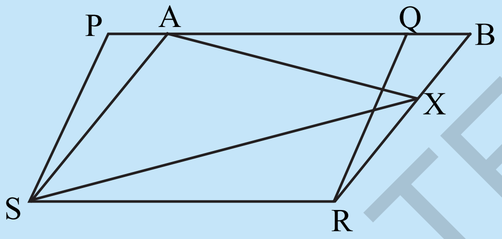


(i) क्षेत्र (ΔAPB) + क्षेत्र(ΔPCD) $= \frac{1}{2} ar(ABCD)$

(ii) क्षेत्र (ΔAPD) + क्षेत्र(ΔPBC) = क्षेत्र(ΔAPB) + क्षेत्र(ΔPCD)

(संकेत: P से, AB को समानांतर रेखा खींचिए)

7. सिद्ध कीजिए कि समलम्ब चतुभुर्ज का क्षेत्रफल, समानांतर भुजाओं के योग को उनके बीच की दूरी द्वारा गुणन करने के बाद प्राप्त संख्या के आधा रहता है ।

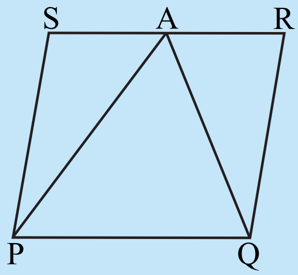


8. PQRS औरABRS समांतर चतुभुर्ज है और भुजा BR पर कोई बिंदु X है। बताईए कि

(i) क्षेत्र(PQRS) = क्षेत्र(ABRS)

(ii) क्षेत्र$(\Delta AXS) = \frac{1}{2} ar(PQRS)$

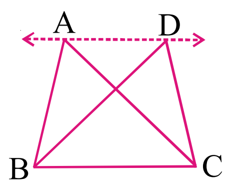
9. आकृति मे दर्शाए जैसा एक किसान के पास समांतर चतुभुर्ज के आकार में PQRS खेत है । उसने RS पर मध्यबिन्दु A लेकर इसे P और Q के साथ जोडा। खेत कितने भागों मे विभाजित हुआ? इन भागों के आकार क्या है? किसान मूंगफली बोना चाहता है जो दलहन और धान के क्षत्रों के योग के समान हो। उसे कैसा बोना चाहिए? कारणों के साथ लिखिए ?



10. सिद्ध कीजिए कि समचतुभुर्ज का क्षेत्रफल उसके कर्णों के गुणनफल के आधे के बारबर होता है।

11.6 एक ही आधार पर और समानांतर रेखाओं के बीच मे त्रिभुजः

हम एक ही आधार पर और समानांतर रेखाओं के बीच स्थित आकृतियों की ओर देख रहे है। माना कि दो त्रिभुज ABC और DBC एक ही आधार BC पर और समानांतर AD और BC के बीच मे है ।



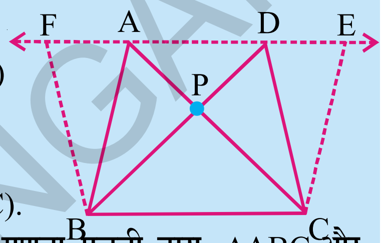
ऐसे त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के बारे मे तुम क्या कह सकते हो? स्पष्टतः एक ही आधार पर और दो समानांतर रेखाओं के बीच मे ऐसे त्रिभुजों के युग्म, अनंत प्रकार से खींचे जा सकते है ।

इसके लिए एक क्रियाककलाप करते है ।

क्रियाकलाप

एक ही आधार पर अथवा (समान आधार पर) और समान समानांतर रेखाओं के बीच मे, एक आरेख कागज पर आकृति के अनुसार त्रिभुजों के युग्मों को खींचिए ।

माना कि एक ही आधार पर BC पर और समानांतर रेखाओं के BC और FE के बीच ΔABC और ΔDBC स्थित है । $\overline{AD}$ को दोनों ओर बढाइए और $CE \parallel AB$ और $BF \parallel CD$ खींचिए । एकही आधार BC पर और समान समानान्तर रेखाओं BC पर और EF के बीच में समांतर चतुर्भुज AECB और FDCB बने ।



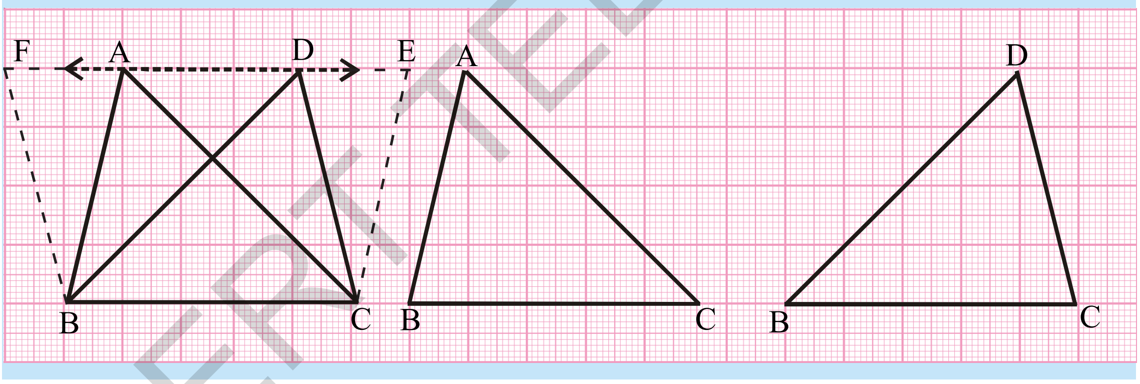
इस तरह क्षेत्र (AECB) = क्षेत्र (FDCB). (कैसे ?)

इस तरह क्षेत्र $(\Delta ABC) = \frac{1}{2}$ क्षेत्र(समांतर चतुर्भुजAECB) ...(i)

और क्षेत्र $(\Delta DBC) = \frac{1}{2}$ क्षेत्र(समांतर चतुर्भुजFDCB) .... (ii)

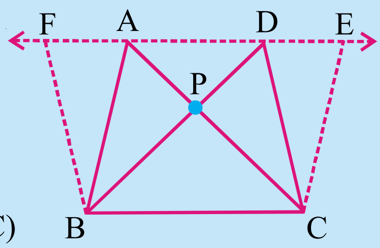
(i) और (ii) से हमे पता चलता है क्षेत्र (ΔABC) = क्षेत्र(ΔDBC).

इससे पूर्व क्रिया कलाप के अनुसार आरेख कागज पर वर्गोंकी गुणना पद्धती द्वारा ΔABC और ΔDBC के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और क्या वह (क्षेत्रफल) सही है, इसकी जाँच कीजिए ।



विचार-विमर्श कीजिए और लिखिए

आकृति के अनुसार एक ही आधार पर और दो समानांतर रेखाओं के बीच दो त्रिभुज ABC और DBC खींचिए। AC और BD के प्रचिच्छेद बिंदु P लीजिए। $CE \parallel BA$ और $BF \parallel CD$ इस प्रकार खींचिए कि रेखा AD पर बिन्दु E और F स्थित है ।



क्या तुम बता सकते है क्षेत्र(ΔPAB) = क्षेत्र(ΔPDC)

संकेत : त्रिभुज सर्वसमान नही है किन्तु बराबर क्षेत्रफल वाले है ।

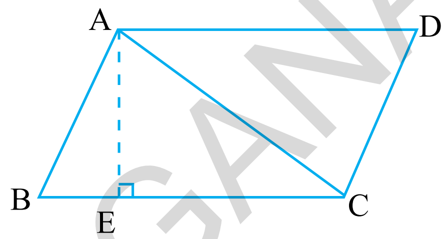
उपप्रमेय-1 : बताईए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल इसके आधार (अथवा कोई भी भुजा) और उसके अनुकुल उँचाई के गुणनफल के आधा रहता है ।

उपपत्ति: माना कि ABC त्रिभुज है ।$AD \parallel BC$ इस प्रकार खींचिए कि $CD = BA$.

अब ABCD समांतर चतुर्भुज है जिसका एक कर्ण AC है।

हम जानते है कि $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

इसलिए क्षेत्र ΔABC = क्षेत्रΔACD (सर्वांगसम त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होत है)



इसलिए $ar\Delta ABC = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

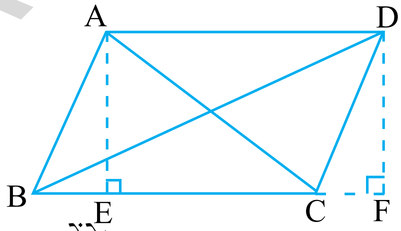
$AE \perp BC$ खींचिए।

इसलिए क्षेत्र$(ABCD) = BC \times AE$

इसलिए क्षेत्र$(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(ABCD) = \frac{1}{2} \times BC \times AE$

अतः क्षेत्र$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ आधार $BC \times$ इसके अनुकुल उंचाई AE.

प्रमेय-11.2 : एक ही आधार (अथवा समान आधार) और बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुज समान समानांतर रेखाओं के बीच रहते है ।



आकृति को ध्यानपूर्वक देखिए। एकही आधार BC पर स्थित त्रिभुजों को नाम दीजिए। ΔABC और ΔDBC की उँचाईयाँ क्या है?

यदि दो त्रिभुज के समान आधार और समान क्षेत्रफल हो तो उनकी उँचाईयाँ क्या होगी? क्या A और D संरेखीय है?

ऊपर के परिणामों के उपयोग समझने के लिए अब कुछ उदाहरण लेंगे।

उदाहरण 4. बताईए कि त्रिभुज की माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रवाले त्रिभुजों मे विभाजित करती है।

हल: माना कि ABC त्रिभुज है और इसकी एक माध्यिका AD है।

ΔABD और ΔADC में, शीर्ष उभयनिष्ठ है और इनके आधार BD और DC बराबर है। $AE \perp BC$. खींचिए।

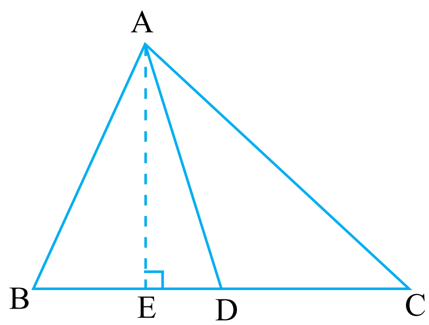
अब क्षेत्र $(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \times$ आधार$BD \times$ ऊँचाई ΔADB

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because BD = DC)$

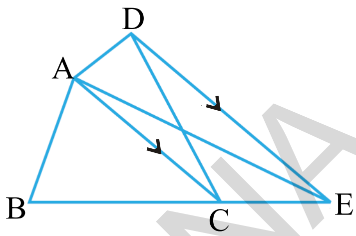
$= \frac{1}{2} \times$ आधार $DC \times$ ऊँचाई ΔACD

$= ar\,\Delta ACD$



अतः क्षेत्र (ΔABD) = क्षेत्र (ΔACD)

उदाहरण -5. आकृति में, ABCD चतुर्भुज है। AC कर्ण है और $DE \parallel AC$ और बढाए हुए BC को DE बिंदु पर मिलती है। बताईए कि क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र(ΔABE).



हल : क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र(ΔABC) + क्षेत्र(ΔDAC)

ΔDAC और ΔEAC एकही आधार $\overline{AC}$ पर स्थित है ।

और समानांतर रेखाएँ $DE \parallel AC$ के बीच मे है ।

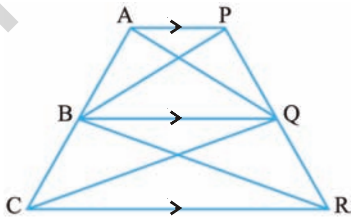
क्षेत्र (ΔDAC) = क्षेत्र(ΔEAC) (क्यों?)

समान आकृति के क्षेत्रफल दोनो ओर जोडने पर

क्षेत्र(ΔDAC) + क्षेत्र (ΔABC) = क्षेत्र(ΔEAC) + क्षेत्र(ΔABC)

अतः क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र(ΔABE)

उदाहरण 6. आकृति में, $AP \parallel BQ \parallel CR$. सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र (ΔAQC) = क्षेत्र(ΔPBR).



हल : ΔABQ और ΔPBQ $AP \parallel BQ$ के बीच है।

क्षेत्र(ΔABQ) = क्षेत्र(ΔPBQ) ...(1)

इसी प्रकार

क्षेत्र (ΔCQB) = क्षेत्र (ΔRQB) (एकही आधार BQ और $BQ \parallel CR$) ...(2)

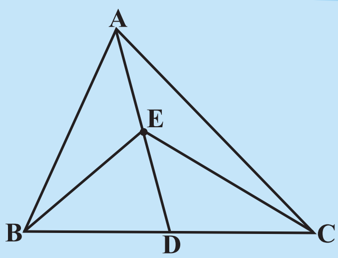
(1) और (2) के परिणाम जोडने पर

क्षेत्र (ΔABQ) + क्षेत्र(ΔCQB) = क्षेत्र(ΔPBQ) + क्षेत्र(ΔRQB)

अतः क्षेत्र ΔAQC = क्षेत्र ΔPBR

अभ्यास - 11.3

1. त्रिभुज ABC (आकृति देखिए), माध्यिका AD का मध्य बिंदु E है, बताईए कि

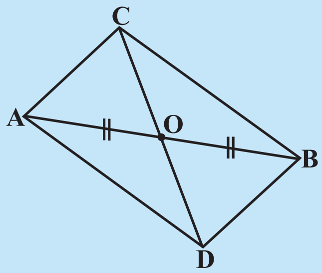


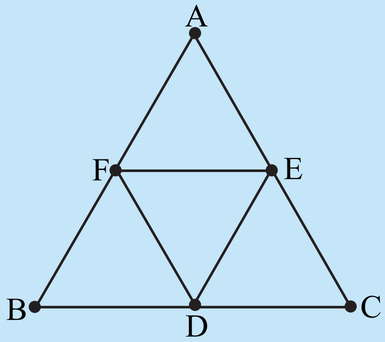
   (i) क्षेत्र ΔABE = क्षेत्र ΔACE

   (ii) $ar\Delta ABE = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

2. बताईए कि समांतर चतुर्भुज के कर्ण इसे समान क्षेत्र के चार त्रिभुजों मे विभाजित करता है।

3. आकृतियाँ, एक ही आधार $\overline{AB}$ पर दो त्रिभुज ΔABC और ΔABD है। यदि रेखाखम्ड CD $\overline{AB}$ को O पर समद्विभाजित करता है तो बताईए कि क्षेत्र (ΔABC) = क्षेत्र (ΔABD).





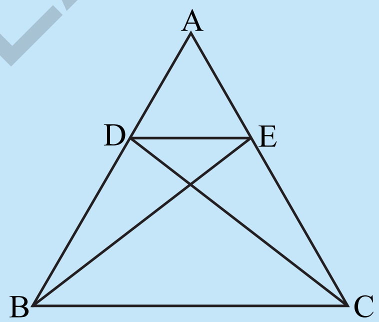
4. आकृति में, ΔABC, की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिंदु क्रमशः D, E, F हैं। बताईए कि

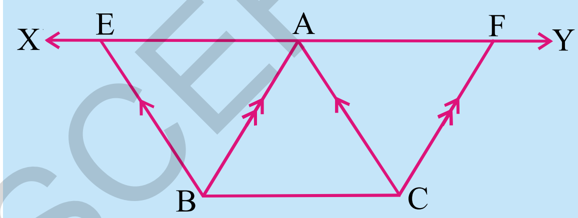
(i) BDEF समांतर चतुर्भुज है।

(ii) $ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

(iii) $ar(BDEF) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$

5. आकृति में, ΔABC के AB तथा AC भुजाओं पर क्रमशः D और E बिंदु इस प्रकार है कि क्षेत्र (ΔDBC) = क्षेत्र(ΔEBC). सिद्ध कीजिए कि $DE \parallel BC$.

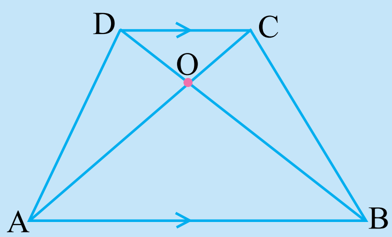


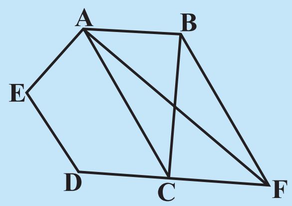


6. आकृति XY को समानांतर रेखा जो A से गुजरती है XY को क्रमशः E और F पर मिलती है बताईए की क्षेत्र (ΔABE) = क्षेत्र (ΔACF).

7. आकृति, समलंब चतुर्भुज ACBD के कर्ण AC और BD है जो एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेदित करते है। $AB \parallel DC$ है। सिद्ध कीजिए कि

क्षेत्र(ΔAOD) = क्षेत्र(ΔBOC).



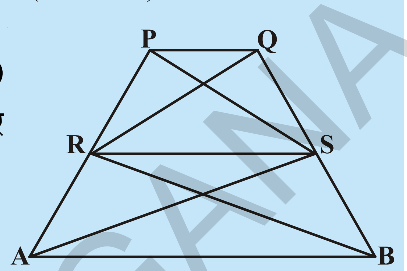


8. आकृति में ABCDE पंचभुज है। 'B' से गुजरने वाली AC को समानान्तर रेखा बढाई गई जो DC को F पर मिलती है। बताईए कि

(i) क्षेत्र (ΔACB) = क्षेत्र (ΔACF)

(ii) क्षेत्र (AEDF) = क्षेत्र (ABCDE)

9. आकृति में, यदि क्षेत्र ΔRAS = क्षेत्र ΔRBS और क्षेत्र (ΔQRB) = क्षेत्र(ΔPAS) तो बताईए कि दोनों चतुर्भुज PQSR और RSBA समलंब चतुर्भुज होते हैं ।



10. एक देहाती रामय्या के पास चतुभुर्ज के आकार मे एक जमीन का टूकडा (भूखण्ड) है । गाँव की ग्रामपंचायत ने विद्यालय के निर्माण के लिए इस भूखण्ड के एक कोनेका कुछ भाग लेने का निर्णय लिया। रामय्या इस प्रस्ताव पर सहमत हुआ बशर्ते की जमीन दी जाए ताकि त्रिभुजाकार भूखण्ड बने। कैसे यह प्रस्ताव कार्यान्वित होगा, स्पष्ट कीजिए। (भूखण्ड का संबंधित रेखाचित्र बनाईए)

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

समकोण त्रिभुज ABC में A समकोण है। BCED, ACFG और ABMN यह क्रमशः BC, CA और AB भुजाओं पर बने वर्ग है। रेखाखण्ड AX $\perp$ DE BC को Y. और DE को X. पर मिलती है। AD, AE BF और CM को मिलाईए । (आकृति देखिए).

बताईए कि

(i) ΔMBC $\cong$ ΔABD

(ii) क्षेत्र (BYXD) = 2क्षेत्र (ΔMBC)

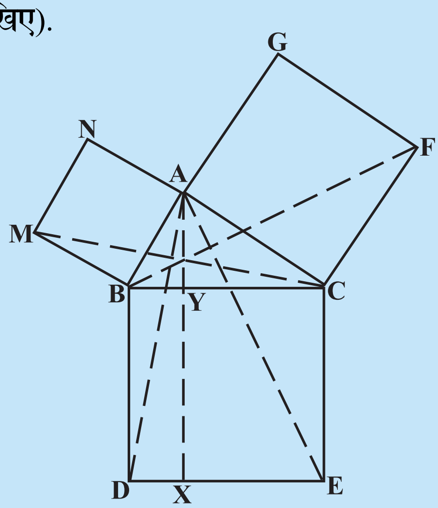
(iii) क्षेत्र(BYXD) = क्षेत्र(ABMN)

(iv) ΔFCB $\cong$ ΔACE

(v) क्षेत्र(CYXE) = 2 क्षेत्र(FCB)

(vi) क्षेत्र(CYXE) = क्षेत्र (ACFG)

(vii) क्षेत्र(BCED) = क्षेत्र(ABMN) + क्षेत्र(ACFG)



(vii) परिणाम क्या तुम शब्दों मे लिख सकते हो? यह पैथागोरस का प्रसिद्ध प्रमेय है। तुम दसवी कक्षा में इस प्रमेय की सरलतम उपपत्ति सिखोगे ।

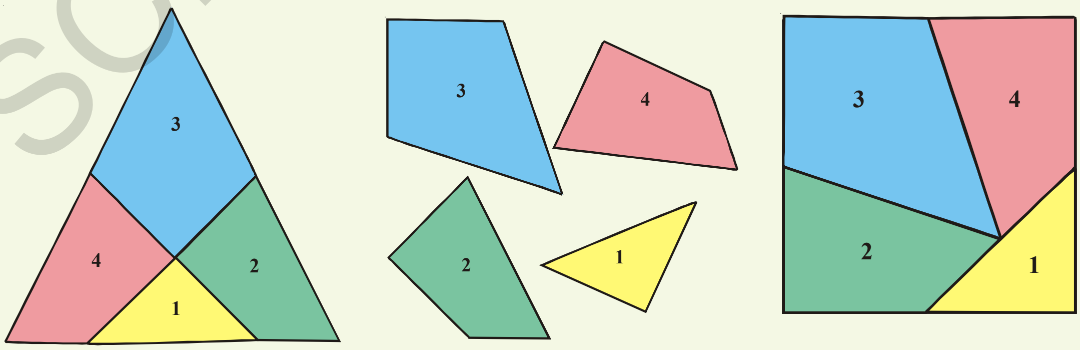
हमने क्या सीखा?

1. किसी आकृति का क्षेत्रफल वह एक संख्या है (कोई मात्रक मे) जो उस आकृति धिरे तल के भाग के साथ सम्बद्ध है ।
2. दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते है परन्तु इसका विलोम सत्य रहना आवश्यक नही है।
3. यदि X एक तलीय क्षेत्र है आकृतियाँ P और Q, दो परस्पर व्यापी तलीय क्षेत्रों से बना हुआ है, तब क्षेत्र (X) = क्षेत्र(P) + क्षत्र(Q)
4. दो आकृतियाँ एक ही आधार और समान समानांतर रेखाओं के बीच स्थित कहलाती है यदि उनमें उभयनिष्ठ आधार (भुजा) हो और प्रत्येक आकृति उभयनिष्ठ भुजा के सम्मुख शीर्ष, आधार को समानान्तर रेखा पर स्थित होते है ।
5. एक ही आधार (अथवा बराबर आधार) पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुभुर्ज के क्षेत्र बराबर होते है ।
6. सामान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसका आधार और उसके अनुकूल उँचाई का गुणनफल रहता है।
7. समान क्षेत्रवाले और एक ही आधार (अथवा बराबर आधार): पर स्थित समांतर चतुभुर्ज समान सामानंतर रेखाओं के बीच रहते है ।
8. यदि एक समान्तर चतुभुर्ज और एक त्रिभुज एक ही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच स्थित हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल, समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा रहता है ।
9. एकही आधार (बराबर आधार) पर और समान समानन्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते है ।
10. एक ही आधार (अथवा बराबर आधार) पर स्थित और जिनके क्षेत्रफल समान है, ऐसे त्रिभुजु समान समानान्तर रेखाओं के बीच रहते है ।

क्या तुम जानते हो
पहेली क्षेत्रफल की

जर्मन गणितज्ञा डेविड हिलवर्ट (1862-1943) ने सर्वप्रथम सिद्ध किया कि कोई भी बहुभुज, इस सीमित टुकडोकी संख्या मे काटकर बराबर क्षेत्रफल के किसी भी बहुभुज में रूपांतरण कर सकते है ।

अब हम देखते है कि कैसे एक अंग्रेज उलझन सुलझाने वाला व्यक्ति हेन्री एमीस्ट डूडेन्सी (1847 - 1930) एक समभुज त्रिभुज को चार टुकडोमें काटकर उसे वर्ग मे रूपांतरण किया ।



उसकी धारणाओं का उपयोग करते हुऐ कुछ अधिक समस्याएँ सुलझाने की कोशिश कीजिए और आनन्द प्राप्त कीजिए।

12

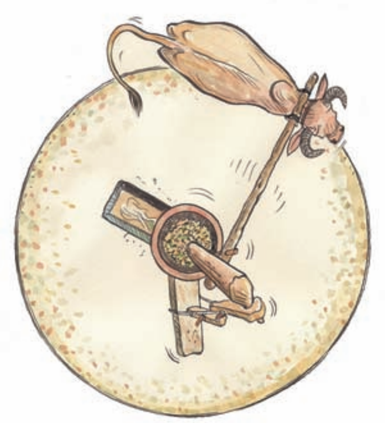
वृत्त
(Circles)

12.1 प्रस्तावना

हम अपने आसपास बहुतसी गोल आकार की वस्तुएँ जैसे सिक्के, चूडियाँ, घडीयाँ, पहिए, बटन, आदि देखते है। सभी वस्तुएँ

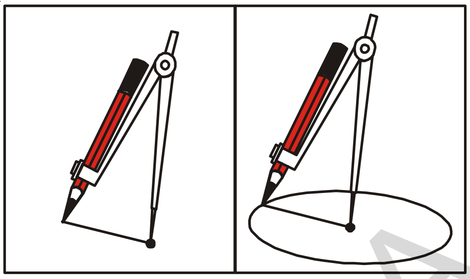
आकार में वृत्ताकार हैं। तुम अपने बचपन के दिनों में शायद सिक्के, चूडी, बटन के कोर के साथ-साथ, वृत्त बनाने के लिए बाहरी ओर से रूपरेखा बनायी होगी। इसलिए, क्या तूम बतला सकते हो, वृत्ताकार वस्तुएँ तथा इन वस्तुओं की सहायता से खींचे हुए वृत्तों में क्या अन्तर है? ऊपर की हमने देखी हूई सभी वृत्ताकार वस्तुओं को मोटाई है और ये त्रिविमीय वस्तुएँ हैं जब कि वृत्त द्विविमीय आकृति है जिस में मोटाई नहीं रहती है।

अब, वृत्त का दूसरा उदाहरण लीजिए। शायद तुमने कोल्हू (Oil Press) जो ऑइल मील कहलाती है, (स्पॅनिश व्हील जिसे तेलुगु मे गानुगा कहते है) देखा होगा। आकृति में एक आबद्ध (fined) बिंदु पर एक बैल को आलंम्ब के साथ बंधा हुआ है। क्या तुम मार्ग का आकार पहचानते हो जिस पर बैल गतिमान है? यह आकार में वृत्ताकार है।



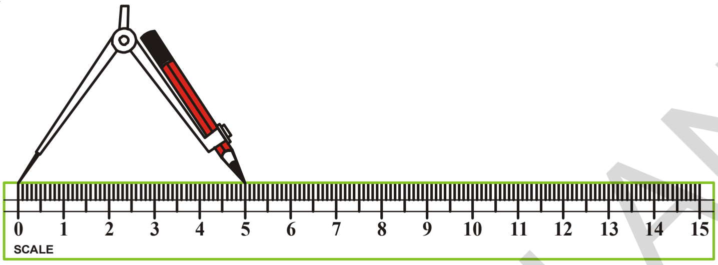
बैल द्वारा बनाई गई सीमा रेखा वृत्त है। कोल्हू एक निश्चित बिंदू पर जमीन के साथ जूडा रहता है, जो वृत्त का केंद्र है। वृत्त के संदर्भ में, आलम्ब की लम्बाई, वृत्त की त्रिज्या होती है। आपके जीवन से वृत्तों के बारेमें कुछ और उदाहरण सोचिए।

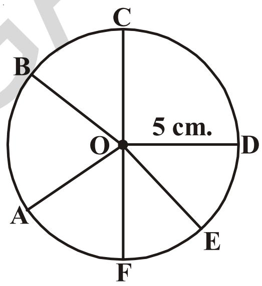
इस अध्याय में हम वृत्त, इससे संबधित पारिभाषिक शब्द, और इसके गुणधर्मो का अभ्यास करेंगे।



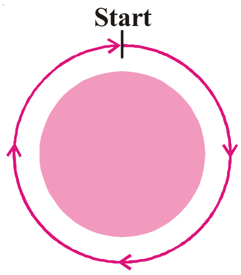
परकार के पेन्सिल होल्डर में पेन्सिल रखिए और स्क्रू या पेंच कसिए। आरेख-कागज पर बिन्दू 'O' चिन्हित कीजिए। 'O'. पर परकार की नुकीला बिन्दू दृढ रखिए। परकार को बिन्दुपर दृढता से रखते हुए पेन्सिल को कागज पर आकृति में बताये जैसे चारों और घुमाईए ताकि वृत्त प्राप्त हो। यदि हमे, दी हुई त्रिज्या का वृत खींचना आवश्यक है तो स्केल की सहायता से हम यह करते है।

परकार के नुकीले बिंदु और पेन्सिल की नोक में दी हुई त्रिज्या की लम्बाई के बराबर अंतर ठीक कीजिए। बिन्दु 'O'को चिन्हित कीजिए। (आकृति मे वृत की त्रिज्या ५ सेमी है) और ऊपर के वर्णन के अनुसार वृत खींचिए।





वृत्त पर कोई भी 6 बिंदूA, B, C, D, E और F लीजिए. आप देख सकते है कि प्रत्येक रेखाखण्ड OA, OB, OC, OD, OE और OF की सम्बाई 5 से.मी. है., जो दी हुई गिज्या के बराबर है। कुछ और बिंदु, वृत्तपर लीजिए और उन की 'O'. से दूरीयाँ नापिए। तुमने क्या अवलोकर किया? गम कह सकते है कि वृत्त, एक समतल में उन सभी बिन्दुओं का समुह है जो उसी समतल पर स्थित किसी निश्चित बिंदु से किसी निश्चित दूरी पर स्थित होता है।

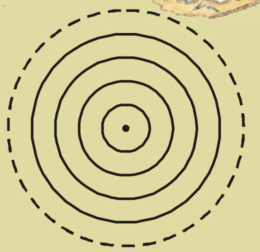


निश्चित बिंदु 'O' वृत्त का केन्द्र कहलाता है और निश्चित दूरी OA, वृत्त की गिज्या (या अर्धव्यास) कहलाती है।

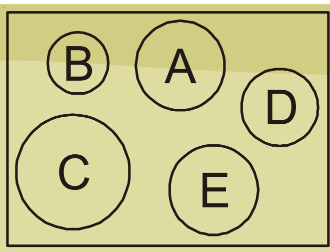
एक वृत्ताकार बगीचे में नरसिम्हा किसी बिंदुसे चलना आरंभ किया और बगीचे के चारों और १ चक्कर पूर्ण किया। नरसिम्हा द्वारा तय की दूरी को तुम क्या कहते हो? यह वृत्ताकार बगीचे के सीमा की कुल लम्बाई है और यह बगीचे की परधि कहलाती है। इसलिए, वृत की कुल लम्बाई को उसकी परिधि कहते है।

क्रिया कलाप

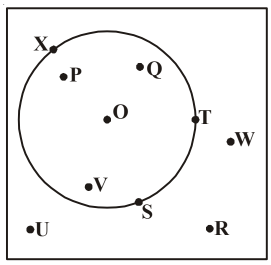
अब हम नीचे दिया हुआ क्रिया कलाप करेंगे। कागज के टुकडे एक बिंदु चिन्हित कीजिए। इस बिंदु को केन्द्र मानते हुए कोई भी अर्धव्यास का एक वृत्त खींचिए। अब अर्धव्यास कम या अधिक करते हुए इसी को केंद्र मानते हुए कुछ और वृत्त बनाईए। इस क्रिया कलाप में प्राप्त वृत्तों को आप क्या कहते है? वृत्त जिनका उभयनिष्ठ केंद्र विभिन्न अर्धव्यास है, संकेन्द्री वृत कहलाते है।



यह कीजिए




1. आकृति में, कौन से वृत्त, वृत्त A. को सर्वांगसम है ?
2. कौनसे माप वत्तों को सर्वांग सम बनाते है?



वृत्त, समतल को, जिसपर वह स्थित है, तीन भागों में विभाजित करता है। वह है (i) वृत के भीतर, जो वृत्त का आन्तरिक भाग कहलाता है। ; (ii) वृत्त पर, यह वृत्त की परिधि कहलाती है और (iii) वृत्त के बाहर जो वृत्त का बाहियभाग कहलाता है। संलग्न आकृति से उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जो वृत्त पर, के भीतर और बाहर है।

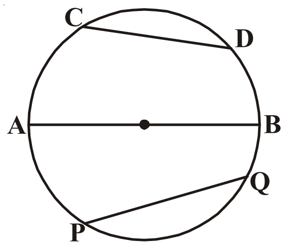
वृत्त और उसका आन्तरिक (अन्तस्थ) मिलकर वृत्ताकार क्षेत्र बनता है।

क्रियाकलाप

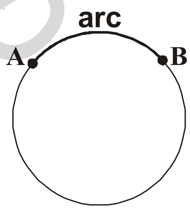
एक पतला वृत्ताकार कागज का टूकडा लीजिए और इसको आधे में मोडिए और खोलिए। पूनः इसे और किसी दूसरे स्थान से आधे में मोडिए और खोलिए। यह क्रिया अनेक बार दोहराईए। अंत में जब आप खोलते है, आप क्या देखोगे।

आप अवलोकर करते है कि सभी चूनत (मोड के निशान) एक ही बिंदुपर प्रतिच्छेद करते हैं। क्या तुम्हे याद है, हम इस बिंदू को क्या कहते है? यह वृत्त का केंदॅ है।

उपर के क्रियाकलाप के यदि हम कागज को किसी भी तरह से, केवल आधे में नहीं, हम देखते है कि चूनत वृत्त पर स्थिति दो बिंदुओं को जोडती है। इन चूनतों को हम वृत्त की ज्याएँ कहते हैं। इसलिए, वृत्त पर स्थित दो बिंदुओं को जोडने वाली रेखा को ज्या कहते है।



लम्बाई में सबसे अधिक जीवा को तुम क्या कहोगे? क्या वह केंद्र से गुजरती है? आकृति देखिए।, CD, AB और PQ वृत्त की जीवाएँ है।

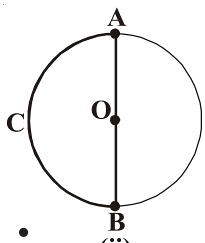


(i)

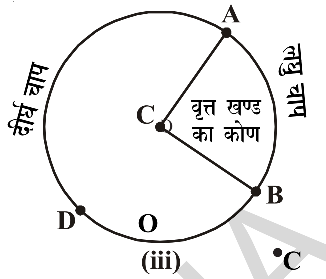
आकृति .(i) में , वृत्त पर A और B दो बिंदु है और वह वृत्त के परिधि को दो भागों में विभाजित करती है। कोई दो बिंदुओं के बीच के वृत्त के भाग को आप चाप कहते है।आकृति (i) AB चाप है और इसे $\overset{\frown}{AB}$ निर्देशित करते है।

यदि चाप के अंतिम बिंदु वृत्त के व्यास के अंतिम सिरे हो तब ऐसा चाप अर्धवृत्तार चाप या अर्धवृत कहलाता है। आकृति (ii) $\overparen{ACB}$ में अर्धवृत्त है।

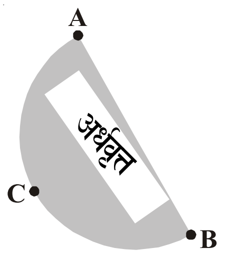
यदि चाप, अर्धवृत से छोटा (कम) हो तो इसे लघुचाप कहते है ओर यदि चाप, अर्धवृत से बडा हो तो इसे दीर्घ चाप कहते है। आकृति(iii) में $\overparen{ACB}$ लघुचाप और $\overparen{ADB}$ दीर्घचाप है।

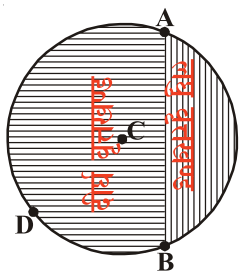


(ii)



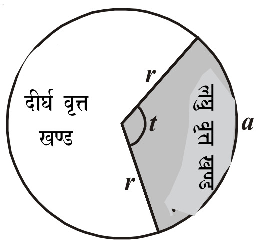
(iii)





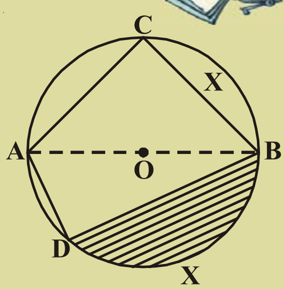
यदि हम किसी के अंतिम बिंदुओं जीवा द्वारा जोड दिया, जीवा वृत को दो भागों में विभाजित करती है। जीवा और लघुचाप के मध्य के क्षेत्र को लघुखण्ड और जीवा और दीर्घचाप के मध्य के क्षेत्र को दीर्घखण्ड कहते है। यदि जीवा, वृत का व्यास हो तब व्यास वृत को दो समान भागों में खण्डों में विभाजजित करता है।

वृत का चाप और केन्द्र से अंतिम बिन्दुओं को जोड़ने वाले दो अर्धव्यास से परविद्ध क्षेत्रफल को वृत्तखण्ड कहते है। एक लघु त्रिज्या खण्ड और दूसरा दीर्घ वृत्तखंड होता है (संलग्न आकृति देखिए)



अभ्यास -12.1

1. संलग्न आकृति में, वृत्त का केन्द्र ‘O’ है। इसमें निम्न लिखित क्षेत्र का नाम दीजिए



(i) $\overline{AO}$ (ii) $\overline{AB}$ (iii) $\overparen{BC}$

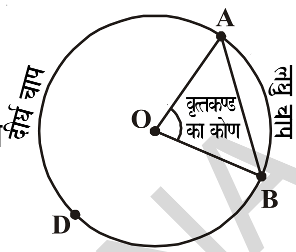
(iv) $\overline{AC}$ (v) $\overparen{DXB}$ (vi) $\overparen{ACB}$

(vii) $\overline{AD}$ ((viii) छायांकित क्षेत्र

2. सही या गलत, बताईए

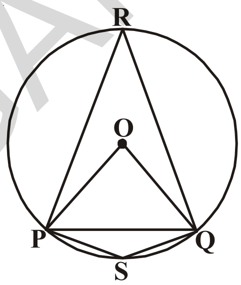
i. वृत्त एक समतल, जिस पर वृत स्थित है, को तीन भागों में विभाजति करता है। ( )
ii. ज्या और लघुचाप से परिबद्ध क्षेत्र को लघु वृत्तखण्ड कहते है। ( )
iii. ज्या और दीर्घचाप द्वारा घिरे हुए क्षेत्र को दीर्घ वृत्तखण्ड कहते है। ( )
iv. व्यास, एक वृत्त को दो असमान भागों विभाजित करता है। ( )
v. वृत्तखंड यह दो त्रिज्याएं और एक ज्या द्वारा परिवद्ध क्षेत्रफल रहता है ( )
vi. वृत्त की सभी ज्याओं में अधिक लम्बाई की ज्या, व्यास कहलाती है। ( )
vii. वृत्त के किसी भी व्यास का मध्यबिंदु, केंद्र रहता है । ( )

12.2 वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर ज्या द्वारा बना हुआ कोण
(Angle Subtended by a chord at a point on the circles)



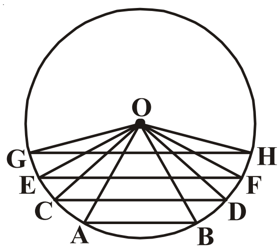
माना कि 'O' केन्द्र के वृत्त पर A,B कोई दो बिंदु है। AO और BO मिलाईए। $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ द्वारा केन्द्र 'O'पर बना कोण अर्थात $\angle AOB$ यह केंद्र 'O' पर जीवा $\overline{AB}$ द्वारा बना हुआकोण कहलाता है।

आकृति में $\angle POQ$, $\angle PSQ$ और $\angle PRQ$ कोणों को तुम क्या नाम देंगे ?



i. जीवा PQ द्वारा केंद्र 'O'पर बना हुआ कोण $\angle POQ$ हैं।

ii. जीवा PQ द्वारा लघुचाप और दीर्घचाप पर स्थित बिंदु S और R पर बने हुए कोण क्रमशः $\angle PSQ$ और $\angle PRQ$ हैं।



आकृति में, वृत्त का केंद्र O और AB, CD, EF और GH वृत्त की ज्या हैं।

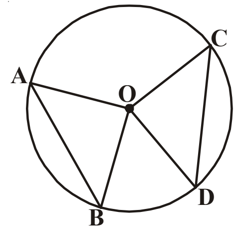
आकृति से हम अवलोकन कर सकते है कि GH > EF > CD > AB.

अब इन ज्या द्वारा केंद्र पर बने हुए कोणों के बारे में तुम क्या हते हो?

कोणों का अवलोकन करने पर, तुम्हे ज्ञात होगा कि वृत्त के केंद्र पर ज्या द्वारा बने हुए कोण बढ़ते है जैसे ज्या की लम्बाई बढ़ती है।

इसलिए, अब सोचिए, यदि, वृत्त की दो बराबर ज्या ली गई और वृत्त के केंद्र पर इन के द्वारा बने हुए कोण कैसे होंगे?

एक वृत्त का निर्माण कीजिए जिसका केंद्र 'O' है। परकार और पटरी की सहायता से दो बराबर ज्या AB और CD खींचिए।



केंद्र 'O'के साथ A, B और C, D मिलाईए। अब कोण $\angle AOB$ और $\angle COD$ मापिए। क्या वह एक दूसरे के बराबर है ? वृत्त की दो अथवा अधकि ज्याएँजो बराबर है, खींचिए और उनके द्वारा केंद्र पर बने कोणों को मापिए।

तुम्हे ज्ञात होगा कि केंद्र पर उनके द्वारा बने हुए कोण बराबर हैं।

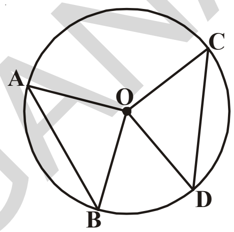
इस तथ्य को सिद्ध करने की कोशिश करते है।

प्रमेय-12.1 वृत्त की समान ज्या केंद्र पर समान कोण बनाते है।

दिया है : माना कि वृत्त का केंद्र 'O' $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ दो समान जीवाएं है और $\angle AOB$ और $\angle COD$ कोण ज्याओं द्वारा केंद्र पर बने हुए कोण है।

सिद्ध करना है: $\angle AOB \cong \angle COD$

रचनाः : प्रत्येक ज्या के अंतिम सिरों को केंद्र के साथ जोड़िए और तुम्हे दो त्रिभुज ΔAOB और ΔCOD प्राप्त होंगे।



उपपत्तिः AOB और COD में

AB = CD (दिया है)

OA = OC (एक ही वृत्त के अर्धव्यास)

OB = OD (एक ही वृत्त के अर्धव्यास)

इसलिए $\Delta AOB \cong \Delta COD$(भुजा भुजा भुजा नियम)

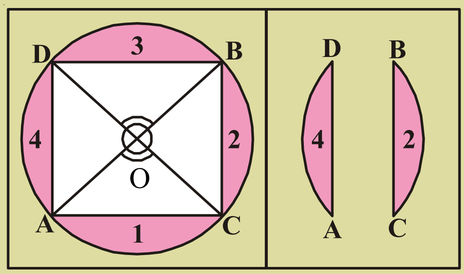
इस तरह, $\angle AOB \cong \angle COD$ (सर्वांग सम त्रिभुजों के सगत भाग)

नोट : "अनुरूप त्रिभुजों के संगत भाग" के स्थान पर हम C.P.C.T. का उपयोग करेंगे। ऊपर के प्रमेय में, यदि वृत्त में, दो ज्याएँ केंद्र पर समान कोण बनाते हैं,

ज्या के बारे में तुम क्या कह सकते हो? निम्न क्रिया कलाप द्वारा हम इसकी जांच-पड़ताल करते है।

क्रियाकलाप

एक वृत्तकार कागज लीजिए। इसे किसी भी व्यास के साथ-साथ इस प्रकार मोडिए कि दो किनारे एक दूसरे के साथ संपाती होते है। अब इसे खोलिए। पूनः इसे दूसरे व्यास के साथ मोडिए। खोलने पर, हमें दिखाई देगा कि दोनों व्यास केंद्र 'O' पर मिलते हैं। यहाँ पर दो शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म बनते है जो बराबर होते है। व्यास के अंतिम सिरों को A, B, C और D नाम दीजिए। जीवाएं , , $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ और $\overline{AD}$ खींचिए।



अब, चार खण्ड 1, 2, 3,4 को काटकर उन्हे अलग से लीजिए।

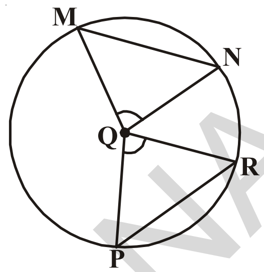
यदि तुम इन खण्डों को युग्मों में एक के ऊपर दूसरा रखिए। यूग्म (1,3) और (2,4) के किनारे एक दूसरे के साथ मेंल खाते है।

क्या $\overline{AD} = \overline{BC}$ और $\overline{AC} = \overline{BD}$?

यद्यपि इस विषय स्थिति में तुमने देखा है, दूसरे समान कोणों के लिए भी कोशिश कीजिए। सभी जीवाएं, बराबर रहती है इसका कारण है नीचे दिया प्रमेय। इसे हम प्रमेय रुप में सिध्द करेंगे।

ऊपर के प्रमेय के विलोम के बारे में क्या कह सकते है?

प्रमेय-12.2 : यदि वृत्त के केंद्र पर, उसके ज्याओं द्वारा बने हुए कोण बराबर हो तब ज्याएँ बराबर होती है।



यह, पूर्व प्रमेय का विलोम है

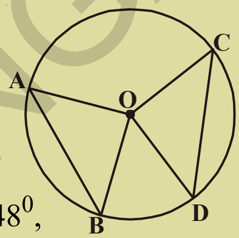
दिए हुए प्रमेय में $\angle PQR = \angle MQN$, तब

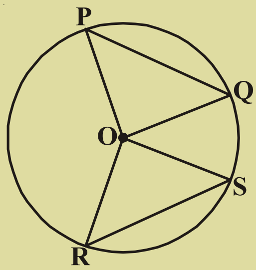
$\Delta PQR \cong \Delta MQN$ (क्यों?)

Is $PR = MN$? (जाँच कीजिए)

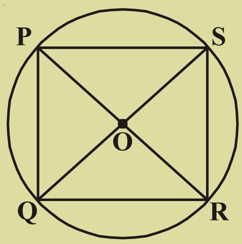
अभ्यास-12.2

1. आकृति में, यदि $AB = CD$ और $\angle AOB = 90^0$, $\angle COD$ ज्ञात कीजिए।





2. आकृति में, $PQ = RS$ और $\angle ORS = 48^0$, $\angle OPQ$ और $\angle ROS$ ज्ञात कीजिए

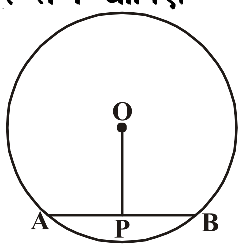


3. आकृति में PR और QS दो व्यास है । क्या $PQ = RS$?

12.3 केंद्र से ज्या पर लम्ब (Perpendicular from the center on the chord)

कार्य विधि:

- **केंद्र O का वृत्त बनाईए। जीवा $\overline{AB}$ खींचिए और 'O'से जीवा $\overline{AB}$ पर लम्ब खींचिए।**
- **माना कि $\overline{AB}$ पर लम्ब का प्रतिच्छेद बिंदु P है ।**
- **PA और PB को नापने के बाद पता चलेगा कि PA = PB**



प्रमेय-12.3 : यदि किसी वृत्त के केंद्र से ज्या पर लम्ब डाला गया तो वह जीवा को बराबर भागों में विभाजित करता है।

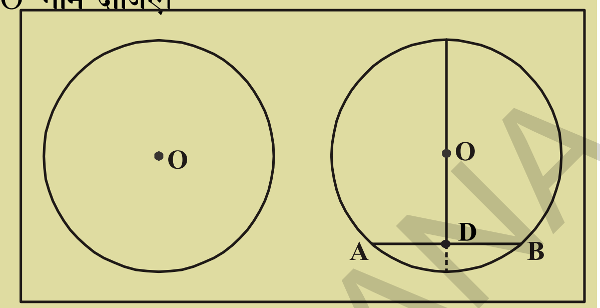
O से A और B को मिलाने के बाद सिद्ध कीजिए कि $\Delta OPA \cong \Delta OPB$।इस की उपपत्ति अपने-आप लिखिए।

इस प्रमेय का विलोम क्या है?

"वृत्त के ज्या के मध्यबिंदु से वृत्त के केंद्र को मिलाने वाली सरल रेखा ज्या पर लम्ब होती है।"

क्रियाकलाप

एक वृत्ताकार कागज लीजिए और केंद्र को 'O' नाम दीजिए।

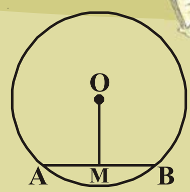


इसे दो असमान भागों में मोडिए और खोलिए। माना कि यूनट, जीवा AB को निर्देशित करती है। अब और एक बार इस प्रकार मोडिए कि A, B के साथ संपाती हो। दो यूनटों का प्रतिच्छेद बिंद D लीजिए। क्या AD = DB? ∠ODA = ? ∠ODB = ?यूनटों के बीच का कोण मापिए। ये समकोण हैं। इसलिए, हम एक प्रावक्कल्पना कर सकते हैं, "वृत्त के जीवा के मध्यबिंदु से वृत्त के केंद्र को मिलाने वाली सरल रेखा जीवा पर लम्ब होती है।"

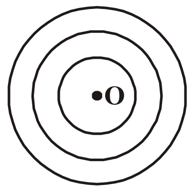
यह कीजिए

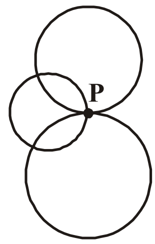
किसी वृत्त केंद्र 'O', जीवा $\overline{AB}$ का मध्य बिंदु 'M' है। अब सिद्ध कीजिए कि AB पर लम्ब है।

(**संकेत :** OA और OB मिलाइए। त्रिभुज OAM और OBM को ध्यानपूर्वक देखिए।)



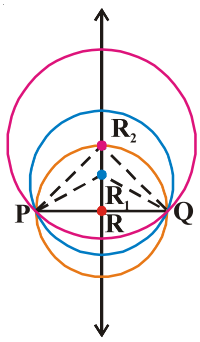
12.3.1 तीन बिंदु जो वृत्त का विवरण देते



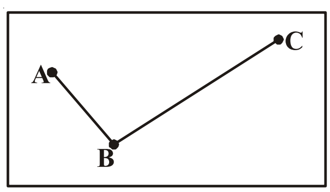


माना कि समतल पर 'O' बिंदु है। केंद्र 'O' से हम कितने वृत्त बना सकते है ? जितने हम चाहते है उतने वृत्त हम बना सकते हैं। हमने इससे पहले सिखा है कि ये वृत्त संकेंद्री वृत्त है। यदि वृत्त के केंद्र के अलावा कोई दूसरा बिंदु 'P' हो तो P से भी हम बहुत वृत्त खींच सकते है। मान लीजिए, बिंदु **P** और **Q** दो भिन्न बिंदु है।

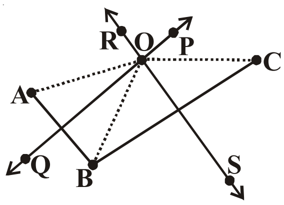
दो बिंदुओं से गुजरने वाले कितने वृत खिंचे जा सकते हैं? हम देखते है कि P और Q से गुजरनेवाले अनेक वृत्त खिंचे जा सकते है ?



P और Q मिलाइए। PQ का लम्ब समद्विभाजक खींचिए। तीन बिंदु R, R_1 और R_2 लम्बद्विभाजक पर लीजिए । ओर R, R_1,और R_2 को केंद्र मानकर क्रमशः RP, R_1P और R_2 अर्धव्यास लेकर वृत्त बनाईए । क्या ये वृत, Q से भी गुजरते है ? (क्यों?) रेखा के लंब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिन्दु उसके अंतिम बिन्दु से समान दूरी पर स्थित होते है। वृत्त का केन्द्र ज्या के किसी भी लंब पर स्थित होता है।



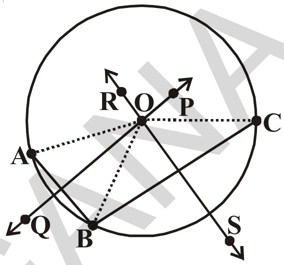
यदि तीन अ-संरेखी बिंदु दिये है, तब इन से गुजरने वाले कितने वृत्त बना सकते है? इसका परीक्षण कीजिए। कोई तीन अ-संरेखी बिंदु A, B, C लीजिए । AB और BC मिलाइए ।



$\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ पर क्रमशः दो लम्ब समद्विभाजक $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ खींचिए। दोनों रेखाएं बिंदु 'O' पर प्रतिच्छेद करती है।(चूंकी दो रेखाओं का एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं रहता है।)

अब, $\overline{AB}$ के लम्बद्विभाजक पर बिंदु O स्थित है। इसलिए $OA = OB$. .....(i)

क्योंकि $\overleftrightarrow{PQ}$ पर स्थित प्रत्येक बिंदु A और B से समान दूरी पर रहते है।



इसी तरह बिंदु 'O', $\overline{BC}$ के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है

इसलिए $OB = OC$ ..... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से, हम कह सकते है कि

$OA = OB = OC$ (संक्रमण नियम)

इसलिए, केवल 'O' एक ऐसा बिंदु है जो A, B और C बिन्दुओं से समान दरी पर रहता है। अतः यदि O को केंद्र मानकर OA त्रिज्या से वृत बनाए तो वह B और C से गुजरता है। अर्थात A, B और C से गुजरने वाला केवल एक ही वृत्त रहता है।

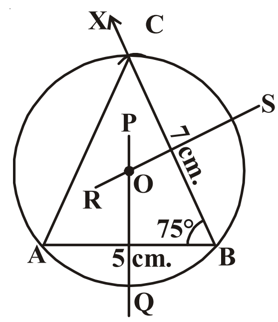
ऊपर के निरीक्षण पर आधारित प्राक्कल्पना है,"तीन अ-संरेखी बिंदुओं से गुजरने वाला केवल एक ही वृत्त बना सकते है।"

नोट : यदि हम AC मिलाए, तो त्रिभुज ABC बनता है। इसके सभी शीर्ष वृत पर स्थित है। यह वृत्त त्रिभुज का परिवृत कहलाता है । 'O' परि केंद्र और त्रिज्या OA या OB या OC परि त्रिज्या कहलाती है।

यह कीजिए

यदि तीन बिंदु संरेखी है, तब इन बिंदुओं से गुजरने वाले कितने त्रिभुज बनाए जा सकते है ? अब, ये तीन बिंदुओं से गुजरने वाला वृत्त बनाने की कोशिश करते है ।

उदाहरण-1 त्रिभुज ABC का परिवृत्त बनाइए जहाँ $AB = 5$से.मी; $\angle B = 75^0$ और $BC = 7$से.मी



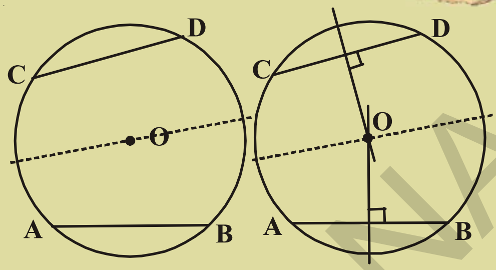
हलः AB= 5 से.मी रेखाखण्ड खींचिए । B पर BX इस प्रकार खींचिए की $\angle B = 75^0$, B को केन्द्र मानवुर 7 से.मी अर्धव्यास से $\overline{BX}$ को C पर काटने वाला चाप खींचिए । ΔABC बनाने के लिए CA मिलाइए। $\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ के लम्ब समद्विभाजक क्रमशः $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ खींचिए । $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ रेखाएं 'O' पर प्रतिच्छेद करती है ।'O' को केंद्र मानते हुए, OA अर्धव्यास से एक वृत्त बनाइए जो B और C से भी गुजरता है। यह अभीष्ट परिवृत है।

12.3.2 ज्याएँ और उनकी वृत्त के क्रेद्र से दूरी

एक वृत्त में अनंत ज्याएँ हो सकती है। माना कि, हमने वृत्त में बराबर लम्बाई वाली अनेक ज्याएँ बनाई तब इन बराबर लम्बाई वाली ज्याओं के केंद्र से दूरी क्या होगी ? निम्न क्रियाकलाप से इसकी हम जांच करते है।

क्रियाकलाप

कागज पर एक बड़ा वृत्त बनाइए और इसको काट कर लीजिए। इसके केंद्र को 'O' नाम दीजिए। इसे आधे में मोडिए। अब अर्धवृतावर कोर के पास ओर एक बार मोडिए। अब इसे खोलिए। तुम्हे दो सर्वागसम ज्याओं के वलन दिखाई देंगे । इन्हे AB और CD से नामांकित कीजिए। अब इनके लिए 'O' से गुजरनेवाले लम्ब वलन बनाइए। विभाजक का उपयोग करते हुए केंद्र से इन परिवाओं की लम्ब दूरी की तुलना कीजिए।

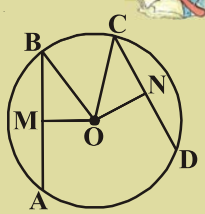


ऊपर का क्रियाकलाप, सर्वसमान ज्याओं को मोडकर, दोहराइए। प्राक्कल्पना जैसे तुम्हारे निरीक्षण को कथन कीजिए।

"वृत्त में सर्वसमान ज्याएँ, वृत्त के केंद्र से समानदूरी पर रहती है ।"

यह कीजिए

आकृति में, वृत का केंद्र O है और AB = CD । रेखा $\overline{AB}$ पर लम्ब OM और $\overline{CD}$ पर लम्ब $\overline{ON}$ है। सिद्ध कीजिए कि OM = ON



क्योंकि ऊपर की प्राक्कल्पना तर्क से सिद्ध की गई है, यह प्रमेय बनता हैं बराबर लम्बाई की जीवाएं वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ रहती है।

उदाहरण-2 आकृति में, वृत्त का केंद्र O हैं। CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए यदि AB = 5 से.मी

हल : Δ AOB और Δ COD में,

OA = OC (क्यों ?)

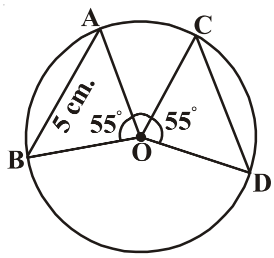
OB = OD (क्यों?)

$\angle$AOB = $\angle$COD

$\therefore$ Δ AOB $\cong$ Δ COD

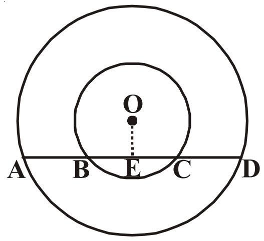
$\because$ AB = CD (सर्वाग सम त्रिभुज के संगत भाग)

$\therefore$ AB = 5 से.मी तब CD = 5 से.मी



उदाहरण-3 संलग्न आकृति में, दो संकेद्री वृत्त है, जिनका केन्द्र 'O' है। बड़े वृत्त की जीवा AD , छोटे वृत्त को B और C पर प्रतिच्छेद करती है। बताइए कि AB = CD

दिया हैः दो से केंद्री वृत्तों का केन्द्र 'O' है । बडे वृत्त की जीवा $\overline{AD}$ है। $\overline{AD}$ ज्या छोटे वृत्त को B और C पर प्रतिच्छेद करती है।.



सिद्ध करना है: AB = CD

रचना : $\overline{AD}$ पर लम्ब $\overline{OE}$ खींचिए।

उपपत्ति : 'O'केंद्र के बडे वृत्त की ज्या AD है और $\overline{AD}$ पर लम्ब $\overline{OE}$ है ।

$\because$ $\overline{OE}$ रेखा $\overline{AD}$ को समद्विभाजित करती है (वृत्त के केन्द्र से ज्या पर खींचा गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।)

$\therefore$ AE = ED ..... (i)

'O' केंद्र के छोटे वृत्त की ज्या $\overline{BC}$ है और $\overline{BC}$ पर लम्ब $\overline{OE}$ है।

$\because$ $\overline{OE}$ से $\overline{BC}$ को समद्विभाजित करती है।(उसी प्रमेय से)

$\therefore$ BE = CE ..... (ii)

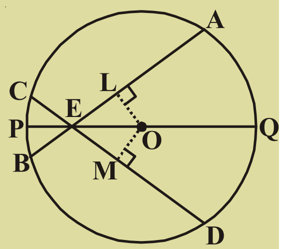
(i) से (ii) समीकरण को घटाने पर, हमें प्राप्त होगा

AE - BE = ED - EC

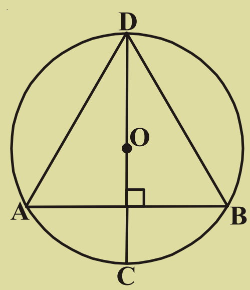
AB = CD

अभ्यास

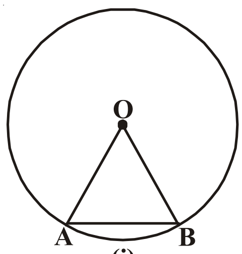
1. निम्नलिखित त्रिभुज बनाइए और इसके लिए परिवृत बनाइए।
   (i) ABC में, AB = 6से.मी, BC = 7से.मी. और $\angle A = 60^o$
   (ii) Δ PQR में, PQ = 5से.मी, QR = 6से.मी.और RP = 8.2से.मी
   (iii) Δ XYZ में, XY = 4.8से.मी, $\angle X = 60^o$ और $\angle Y = 70^o$
2. A, B से गुजरने वाले दो वृत्त बनाइए जहाँ AB = 5.4से.मी
3. यदि दो वृत्त, दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते है तो सिद्ध कीजिए कि उनके केंद्र, उभयनिष्ट ज्या के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित रहते है।



4. यदि वृत्त की दो प्रतिच्छेदी ज्याएँ, उनके प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाले व्यास के साथ समान कोण बनाते है, तो सिद्ध कीजिए कि ज्याएँ समान रहती है।
5. संलग्न आकृति में, वृत्त का केंद्र O और ज्या AB है। CD व्यास है जो AB पर लम्ब है। तो बताइए कि AD = BD



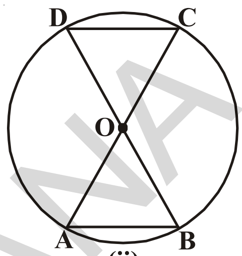
12.4 वृत्त के चाप द्वारा बना हुआ कोण



(i)

आकृति (i) में, $\overline{AB}$ ज्या है और $\overset{\frown}{AB}$ चाप (लघु चाप) है। ज्या और चाप के अंतिम बिंदु एक समान अर्थात A और B है।

इसलिए, केंद्र 'O' पर ज्या द्वारा बना हुआ कोण, केंद्र 'O' पर चाप द्वारा बना हुए कोण, वही रहता है।



(ii)

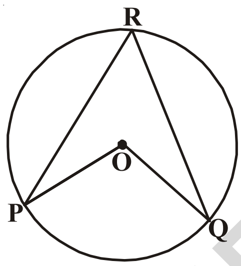
आकृति(ii) में, केंद्र 'O'के वृत्त की $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ दो जीवाएं है। यदि AB = CD, तब $\angle AOB = \angle COD$

इसलिए हम कह सकते कि चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा केंद्र पर बना हुआ कोण और चाप $\overset{\frown}{CD}$ द्वारा केंद्र पर बना हुआ कोण बराबर रहता है (सिद्ध कीजिए $\Delta AOB \cong \Delta DOC$)

ऊपर के निरीक्षणों से हम निष्कर्ष ले सकते है कि "**एक वृत्त में या सर्वसमान वृत्तों में बराबर लम्बाई के चाप केंद्र पर बराबर कोण बनाते है।**"

$\therefore$ **चाप द्वारा केन्द्र पर बनने वाले कोण को उस चाप का माप कहा जाता है।**

12.4.1 किसी चाप द्वारा, वृत के शेष भाग पर स्थित बिंदु पर बना हुआ कोण

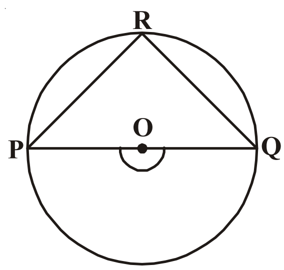


(i)

माना कि, वृत्त का केंद्र 'O' है।

आकृति (i) में $\overset{\frown}{PQ}$ लघुचाप है, आकृति (ii) में अर्धवृत्त है और आकृति (iii) में दीर्घ चाप है।

वृत्त की परिधि पर कोई भी बिंदु R लीजिए। R को P और Q के साथ जोडिए।

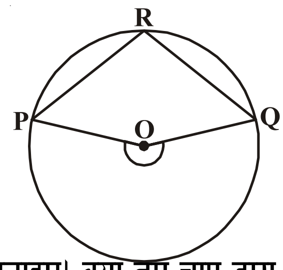


(ii)

चाप PQ द्वारा बिंदु R पर बना हुआ कोण$\angle PRQ$ और केंद्र 'O' पर बना हुआ कोण $\angle POQ$ है।

दि गई आकृतियों के लिए निम्न साराणी पूर्ण कीजिए

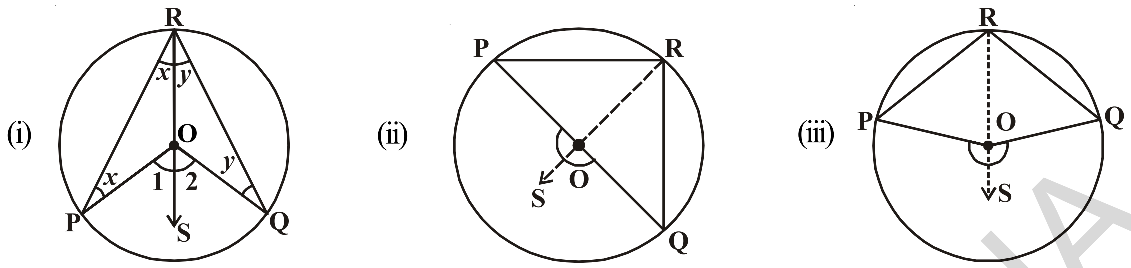
कोण	आकृति (i)	आकृति (ii)	आकृति (iii)
$\angle PRQ$			
$\angle POQ$			



(iii)

इसी तरह कुछ वृत्त बनाइए और चापों द्वारा परिधि पर और केंद्र पर कोण बनाइए। क्या तुम चाप द्वारा वृत पर स्थित बिंदु पर बना हुआ कोण और केंद्र पर बने हुए कोणों के बारे में अनुमान लगा सकते हो ? इसलिए ऊपर के निरीक्षण द्वारा हम कह सकते है कि चाप द्वारा केंद्र *'O'* बना हुआ कोण, वृत के शेष भाग चाप पर स्थित बिंदु पर बने हुए कोण के दुगुणा रहता है।

अब यह अनुमान तार्किक ढंग से सिद्ध करते है।



दिया है: माना कि वृत्त का केंद्र O है।

$\overparen{PQ}$ चाप है जो केंद्र पर $\angle POQ$ बनाता है।

माना कि वृत्त के शेष भाग पर ($\overparen{PQ}$ पर नहीं) बिंदु R है ।

उपपत्ति:यहाँ तीन भिन्न-भिन्न स्थितियाँ है जिसमें (i) $\overparen{PQ}$ लघुचाप है, (ii) $\overparen{PQ}$ अर्धवृत्त है और (iii) $\overparen{PQ}$ दीर्घचाप है।

अब हम बिंदू R को केंद्र 'O' के साथ जोड़ने द्वारा शुरू करते है और इसे बिंदु S तक बढ़ाइए।(सभी स्थितियों में)

सभी स्थितियों के लिए, Δ ROP

RO = OP (एक ही वृत्त की त्रिज्याएं)

इसलिए $\angle ORP = \angle OPR$ (समद्विबाहु त्रिभुज के समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते है।)

Δ ROP का बाह्यकोण $\angle POS$ है।

(रचना)

$\angle POS = \angle ORP + \angle OPR = 2\,\angle ORP$ ..... (1)

($\because$ बाह्यकोण = दो अंतः कोणों का योग)

इसी प्रकार ΔROQ के लिए

$\angle SOQ = \angle ORQ + \angle OQR$ or $2\,\angle ORQ$ ..... (2)

($\because$ बाह्यकोण, दो अंतः कोणों के योग के समान रहता है।)

(1) और (2) से

$\angle POS + \angle SOQ = 2\,(\angle ORP + \angle ORQ)$

यह $\angle POQ = 2\,\angle QRP$ ..... (3)

सुविधा के लिए

माना कि $\angle ORP = \angle OPR = x$

$\angle POS = \angle 1$

$\angle 1 = x + x = 2x$

माना कि $\angle ORQ = \angle OQR = y$

$\angle SOQ = \angle 2$

$\angle 2 = y + y = 2y$

अब $\angle POQ = \angle 1 + \angle 2 = 2x + 2y$

$= 2\,(x+y) = 2\,(\angle PRO + \angle ORQ)$

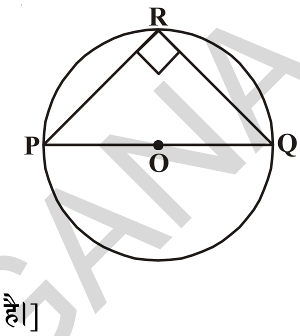
अर्थात $\angle POQ = 2\,\angle PRQ$

अतः प्रमेय होगा : वृत्त के चाप द्वारा केंद्र पर बना हुआ कोण, वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी भी बिंदु पर इसके द्वारा बने हुए कोण के दुगुणा होता है।

उदाहरण-4 मान लीजिए, वृत्त का केंद्र 'O', व्यास PQ है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PRQ = 90^o$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि अर्धवृत्त द्वारा बना हुआ कोण 90^o रहता है।



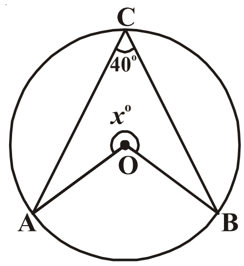
हल: दिया है कि वृत्त का व्यास PQ और केंद्र 'O' है।

$\therefore \angle POQ = 180^o$ [सरल रेखा पर बना हुआ कोण]

और $\angle POQ = 2\angle PRQ$ [चाप द्वारा केंद्र पर बना हुआ कोण, वृत पर स्थित किसी दूसरे बिंदु पर बने हुए कोण के दुगुणा रहता है।]

$$\therefore \angle PRQ = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

उदाहरण-5 संलग्न आकृति में x° का मान ज्ञात कीजिए।



हल: Given $\angle ACB = 40^\circ$

$\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

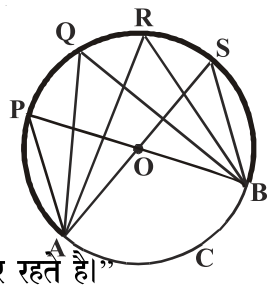
$\because \quad x^\circ + \angle AOB = 360^\circ$

इसलिए $x^\circ = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$

12.4.2 एक ही वृत्तखण्ड में बने हुए कोण (Angles in the Same Sector)

अब हम वृत्त के एक ही वृत्तखण्ड में चाप द्वारा बने हुए कोणों के मापों की चर्चा करेंगे।

मान लीजिए, वृत का केंद्र 'O' और लघुचाप AB (आकृति देखिए) है। माना कि वृत के शेष भाग अर्थात दीर्घचाप AB पर P, Q, R और S बिंदु है। अब चाप AB के अंतिम बिंदुओं को P, Q, R और S के साथ जोडिए ताकि कोण $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ और $\angle ASB$ बने।



$\because \quad \angle AOB = 2\angle APB$ (क्यों ?)

$\angle AOB = 2\angle AQB$ (क्यों ?)

$\angle AOB = 2\angle ARB$ (क्यों ?)

$\angle AOB = 2\angle ASB$ (क्यों ?)

इसलिए $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB$

ध्यान दीजिए कि "चाप द्वारा वृत्त के एक ही वृत्त खण्ड में बने हुए कोण बराबर रहते है।"

नोटः ऊपर की चर्चा में हमने देखा है कि बिंदु P, Q, R, S और A, B एक ही वृत्त पर स्थित है। तुम उन्हें क्या कहेंगे ? "बिंदु जो एक ही वृत्त पर स्थित है, एक वृत्तीय कहलाते है।".

ऊपर के प्रमेय का विलोम निम्न प्रकार से कथन कर सकते हैः-

प्रमेय-12.4 : यदि दो बिंदुओं को जोडने वाला कोई रेखाखण्ड अपने एक ही ओर स्थित किन्ही दो बिंदुओं पर समान कोण निर्मित करें तो चारों बिंदु एक ही वृत्त पर (एक वृत्तीय) होते है।

इस परिणाम की सत्यता तुम नीचे देखोगे।

दिया हैः ABको जोडने वाला रेखाखण्ड $\overline{AB}$ के एक ही ओर बने दो कोण $\angle ACB$ और $\angle ADB$ समान है।

सिद्ध करना हैः A, B, C और D एक वृत्तीय है अर्थात एक ही वृत्त पर स्थित है।

रचनाः तीन असरेखी बिंदु A, B और C से होकर जानेवाला एक वृत्त खींचिए।

उपपत्तिः माना कि बिंदु 'D' वृत्त पर नहीं है।

तब एक ओर बिंदु 'E' इस प्रकार हो सकता है कि

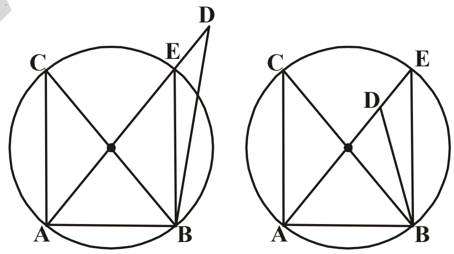
वह AD को (अथवा बढाए गए AD को) प्रतिच्छेद करता है।

यदि A, B, C और E बिंदु वृत पर स्थित हो तो

$\angle ACB = \angle AEB$ (क्यों ?)

दिया है कि $\angle ACB = \angle ADB$.

इसलिए $\angle AEB = \angle ADB$

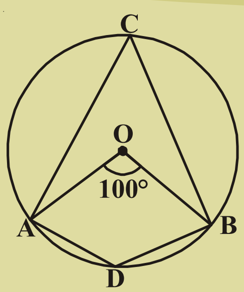


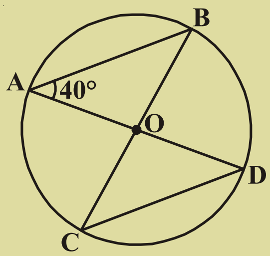
यह तभी संभव है जब बिंदु E और D संपाती हो (क्यों?) **अभ्यास-**12.4

अभ्यास-12.4

1. आकृत्ति में, वृत्त का केंद्र 'O' है।

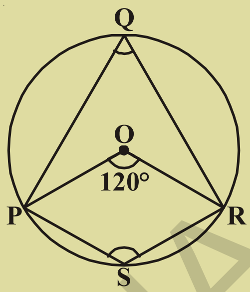
$\angle AOB = 100^\circ$ find $\angle ADB$

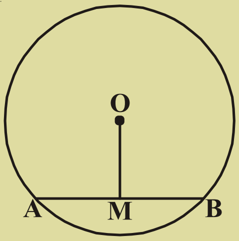




2. आकृत्ति में, $\angle BAD = 40^\circ$ तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।

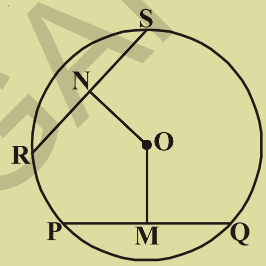
3. आकृत्ति में, वृत्त का केंद्र O है और $\angle POR = 120^{\circ}$, $\angle PQR$ और $\angle PSR$ ज्ञात कीजिए।

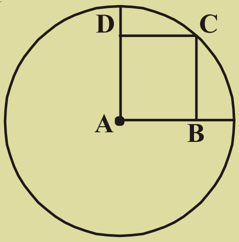




4. आकृत्ति में, वृत्त का केंद्र 'O' है। OM = 3से.मी. और AB = 8से.मी वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

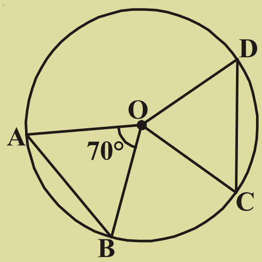
5. आकृति में, वृत्त का केंद्र 'O'है। केंद्र से ज्याओं PQ और RS पर क्रमशः OM, ON लम्ब है। यदि OM = ON और PQ = 6से.मी RS बताइए।





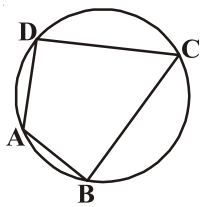
6. वृत्त का केंद्र A है और ABCD वर्ग है। यदि BD = 4से.मी तब वृत्त का अर्धव्यास ज्ञात कीजिए।

7. किसी भी अर्धव्यास का वृत्त बनाइए और तदन्तर केंद्र से समान दूरी पर दो जीवाएँ खींचिए।



8. दी हुई आकृत्ति में, वृत्त का केंद्र 'O' है। AB और CD समान ज्याएँ है। यदि $\angle AOB = 70^{\circ}$, तो ΔOCD के कोण बताइए।

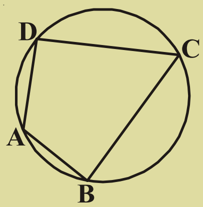
12.5 **चक्रीय चतुर्भुज** (Cyclic Quadrilateral)



आवृत्ति में, चतुर्भुज के शीर्ष A, B, C और D एक ही वृत्त पर स्थित हैं। इस प्रकार के चतुर्भुज ABCD को चक्रीय चतुर्भुज कहते है।**क्रियाकलाप**

क्रियाकलाप

एक वृत्तकार कागज लीजिए। कागज के परिधि पर A, B, C और D चार बिंदुओं को चिन्हित कीजिए। चक्रीय चतुर्भुज बनाइए और कोणों को नापिए। सारणी में लिखिए। तीन बार इसी क्रिया कलाप को दोहराइए

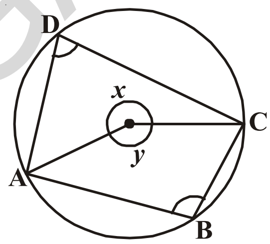


क्रम संख्या	∠A	∠B	∠C	∠D	∠A+∠C	∠B+∠D
1						
2						
3						
4						

सारणी से तुम क्या निष्कर्ष निकालते हो?

प्रमेय-12.5 : "किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के युग्म सम्पूरक होते है।".

दिया है : ABCD चक्रीय चतुर्भुज है।.



सिद्ध करना है: $\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

उपपत्ति : $\angle D = \frac{1}{2} \angle y$ (क्यों ?) ..... (i)

$\angle B = \frac{1}{2} \angle x$ (क्यों ?) ..... (ii)

(i) और (ii) जोडने पर

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle x$$

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}(\angle y + \angle x)$$

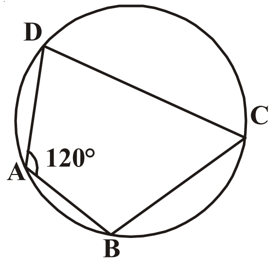
$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \times 360°$$

$$\angle B + \angle D = 180°$$

इसी प्रकार $\angle A + \angle C = 180°$

उदाहरण-6 आकृति में, $\angle A = 120^{\circ}$ तो $\angle C$ ज्ञात कीजिए ?

हल: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।



इसलिए $\angle A + \angle C = 180^{\circ}$

$120^0 + \angle C = 180^{\circ}$

इसलिए $\angle C = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$

ऊपर के प्रमेय का विलोम क्या है ?

"यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी युग्म का योगफल 180^0 हो तो वह चक्रीय चतुर्भुज होता है" विलोम भी सही है।

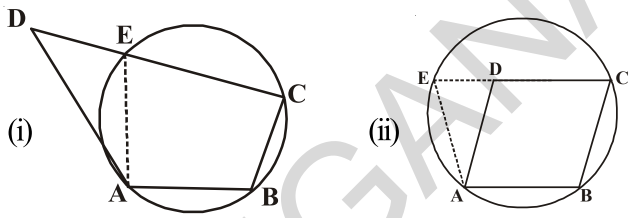
प्रमेय-12.6 : यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी युग्म का योगफल 180^o हो तो वह चक्रीय चतुर्भुज होता है।

दिया है: माना कि ABCD चतुर्भुज होता है कि

$\angle ABC + \angle ADC = 180^o$

$\angle DAB + \angle BCD = 180^o$

सिद्ध करना है: ABCD चक्रीय चतुर्भुज है



रचना: तीन अ-संरेख बिंदु A, B और C से गुजरने वाला वृत्त बनाइए। यदि यह D से गुजरता है, प्रमेय सिद्ध हुआ क्योंकि A, B, C और D एक वृत्तीय है। यदि वृत्त D से नहीं गुजरता है, यह $\overline{CD}$ को प्रतिच्छेद करता है [आकृति (i)] अथवा बढाई हुई $\overline{CD}$ को E पर प्रतिच्छेद करती है [आकृति (ii)]

$\overline{AE}$ को मिलाओं

उपपत्ति: ABCE चक्रीय चतुर्भुज है (रचना)

$\angle AEC + \angle ABC = 180^o$ [चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग]

परन्तु $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$ Given

$\therefore \angle AEC + \angle ABC = \angle ABC + \angle ADC \Rightarrow \angle AEC = \angle ADC$

परन्तु इनमें से एक ΔADE का बाह्य कोण है और दूसरा अंतः कोण है।

हम जानते है कि त्रिभुज का बाह्यकोण हमेशा दो अंतःकोण से अधिक रहता है।

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$ जो असंगत है।

इसलिए हमारी अभिधारणा A, B और C से गुजरने वाला वृत्त D से नही गुजरता है, गलत है।.

$\therefore$ A, B, C से गुरजरने वाला वृत D से भी गुजरता है।

$\therefore$ A, B, C और D एक वृत्तीय है। अतः ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। उदाहरण -

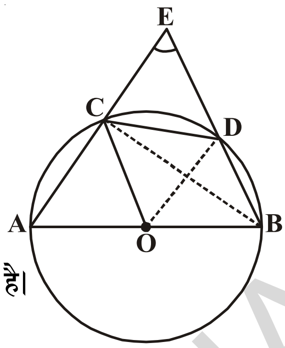
उदाहरण: 7 आकृति में, वृत्त का व्यास $\overline{AB}$ है, ज्या $\overline{CD}$ वृत्त के अर्धव्यास के बराबर है। $\overleftrightarrow{AC}$ और $\overleftrightarrow{BD}$ बढाने पर बिंदु E पर प्रतिच्छेद करते है। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEB = 60°$

हल : OC, OD और BC मिलाइए।

त्रिभुज ODC समभुज त्रिभुज है। (क्यों ?)

इसलिए, $\angle COD = 60°$

अब, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (क्यों ?)



पुनः $\angle CBD = 30°$

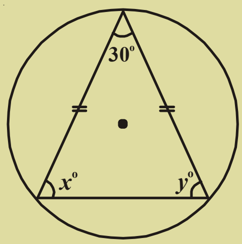
इसलिए, $\angle ACB = 90°$ (क्यों ?)

जिससे, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

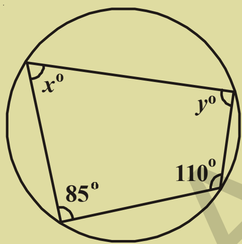
अर्थात $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, $\angle AEB = 60°$ प्राप्त होता है।

अभ्यास : 12.5

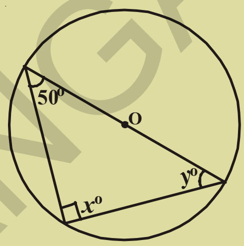
1. नीचे दी गई आकृतियों में x और y के मान ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)



(iii)

2. दिया है कि चतुर्भुज ABCD के शीर्ष A, B, C एक वृत्त पर स्थित है।

   तथा $\angle A + \angle C = 180°$ तो सिद्ध कीजिए कि शीर्ष D भी इसी वृत्त पर स्थित है।

3. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय सम चतुर्भुज एक वर्ग रहता है।

4. यदि समांतर चतुर्भुज चक्रीय हो तो यह आयत रहता है। बताइए।

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए, एक वृत्त खींचिए और इसके अंतर्गत दी गई आकृति बनाइे। यदि दिये गए प्रकार का बहुभुज वृत के अंतर्गत नहीं बना सकते है तो अंसभव है, लिखिए।

   (a) आयात

   (b) समलंब चतुर्भुज

   (c) अधिक कोण त्रिभुज

   (d) समांतर चतुर्भुज जो आयत नहीं है

   (e) न्यूनकोण समद्धि बाहु त्रिभुज

   (f) चतुर्भुज PQRS जिसका $\overline{PR}$ व्यास है

हमने क्या सीखा?

- किसी समतल में सभी बिंदुओं का समुह, जो किसी निश्चित बिंदु से, उसी समतल में निश्चित दूरी पर रहते है, वृत्त कहलाता है।
- वृत्त पर स्थित कोई दो बिंदुओं को जोड़ ने वाला रेखाखण्ड जीवा कहलाता है।
- ज्याओं में सबसे अधिक लम्बाई की जीवा जो वृत्त के केंद्र से गुजरती है, व्यास कहलाती है।
- एक समान अर्धव्यास वाले वृत्त, सर्वांगसम वृत्त कहलाते है।
- एक ही केन्द्र और भिन्न त्रिज्या वाले वृत्तों को संकेंद्री वृत्त कहते है ।
- वृत्त का व्यास उसे दो अर्ध-वृत्तों में विभाजित करता है।
- वृत्त पर स्थित दो बिंदुओं के बीच के भाग का चाप कहते है।
- वृत्त की ज्या और चाप से परिबद्ध क्षेत्र को खण्ड कहते है। यदि चाप, लघुचाप हो तब वह लघुखण्ड और यदि चाप, दीर्घ चाप हो तो यह दीर्घखण्ड कहलाता है।
- चाप और चाप के अंतिम बिंदु और केंद्र को जोडने वाली दो त्रिज्या से परिबद्ध क्षेत्र को त्रिज्या खण्ड (वृत्तखण्ड) कहते है।
- सम चापों से केंद्र पर बनने वाले कोण समान होते है।
- एक ही खण्ड में बने हुए कोण आपस में बराबर रहते है ।
- अर्धव्यास में बना हुआ कोण समकोण रहता है।
- यदि केंद्र पर, दो मापों द्वारा आंतरित(subtended) कोण समान हो तो जीवाएं सर्वांगसम रहती है।
- वृत्त के केंद्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब, जीवा को समद्विभाजित करता है। इसका विलोम भी सही है।
- तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक (अद्वितीय) वृत खींचा जा सकता है।
- वृत्त की समान जीवाएं केंद्र से समदूरस्थ होती है, विलोमतः वृत के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएं लम्बाई में बराबर होती है।
- वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण उसी चाप द्वारा शेष परिधि पर स्थित किसी बिंदु पर बने कोण का दुगुना होता है।
- अपने एकान्तर खण्ड में वृत्त के किसी बिंदु पर समकोण आंतरित करने वाला वृत्त का चाप अर्धवृत्त होता है।
- यदि कोई दो बिन्दुओं को जोड़ने वाला रेखाखण्ड अपने एक एक ही ओर स्थित किन्ही दो बिंदुओं पर समान कोण आंतरित करे तो चारों बिंदु एक वृत्तीय अर्थात एक ही वृत पर स्थित होते है।
- किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के युग्म का योगफल सम्पूरक होता है.

13

ज्यामितीय रचनाएँ (Geometrical Constructions)

13.1 प्रस्तावना

ज्यामितीय आकृतियाँ, जैसे रेखाखण्ड, त्रिभुज, चतुर्भुज, आदि, के निर्माण के लिए कुछ आधारभूत ज्यामितीय उपकरणों की आवश्यकता होती है। तुम्हारे पास कम्पासबॉक्स होगा जिसमे पटरी (स्केल), समकोणक युग्म विभाजक, प्रकार और चांदा या कोणमापक रहते हैं।

सामान्यतः, रेखाचित्रों में इन सभी उपकरणोंकी आवश्यकता होती है। ज्यामितीय निर्माण यह ज्यामितीय आकृतियाँ बनाने की प्रक्रिया है जिसमे केवल दो उपकरण, पटरी और प्रकार का उपयोग करते है। पिछली कक्षाओं मे, हमने त्रिभुज और चतुर्भुज के निर्माण जहाँ कुछ अधिक उपकरणों की आवश्यकता रहती है, वहाँ तुम शायद स्केल और चांदे का उपयोग भी करते है। कुछ रचनाएँ ऐसी भी है जो सरलता से नही बनती हैं। उदाहरण के लिए, त्रिभुज के लिए 3 माप उपलब्ध है, जो सरलता से उपयोग मे नही ला सकते है। इस अध्याय मे हम देखेंगे कि कैसे आवश्यक मापों को ज्ञात कर सकते है और अभीष्ट आकारों (आकृति) को पूर्ण कर सकते है।

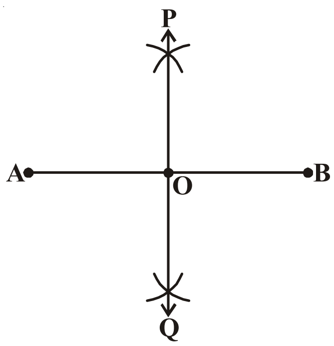
13.2 आधारभूत रचनाएँ (Basic Constructions)

नीचे की कक्षाओं में तुमने सीखा है कि कैसे (i) रेखाखण्ड का लम्ब समद्विभाजक (ii) 30°, 45°, 60°, 90° और 120° के कोण समद्विभाजक अथवा दिए हुए कोण को समद्विभाज करना, निर्माण कैसे किया जाता है। परन्तु इन रचनाओं मे कारण की चर्चा नही की गयी थी। इस अध्याय का उद्देश्य, इन सभी रचनाओं के लिए, आवश्यक तार्किक प्रमाणों की प्रक्रिया देना है।

13.2.1 दिए हुए रेखाखण्ड के लम्ब द्विभाजक की रचना करनाः

उदाहरण-1. दिया हुआ रेखाखण्ड AB के लम्ब द्विभाजक की रचना कीजिए और उसके रचनाक्रम को लिखिए।

हल : रचना के सोपान



सोपान 1 : रेखाखण्ड AB खींचिए।

सोपान 2 : A को केन्द्र मानते हुए $\frac{1}{2}\overline{AB}$ से अधिक अर्धव्यास लेकर, रेखाखण्ड AB के दोनों ओर चाप खींचिए।

सोपान Step 3 : 'B' को केंद्र मानकर ऊपर के जैसे समान अर्धव्यास से चाप खींचिए जो पहले खींचे हुए चापों को काटते हैं।

सोपान 4 : प्रतिच्छेदित बिंदुओं को P और Q से नामांकित कीजिए ।

P और Q मिलाईए।

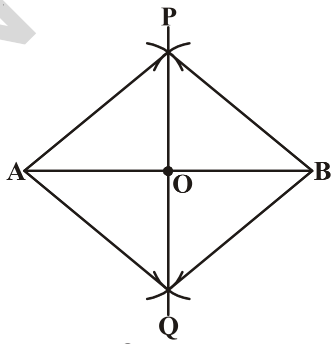
सोपान 5 : माना कि PQ रेखा $\overline{AB}$ को O बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है।

इस तरह रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$, AB का अभीष्ट लम्ब समद्विभाजक है।

"AB का लम्ब समद्विभाजक PQ है।" इसे आप कैसे सिद्ध करोगे?

उपरोक्त आकृति बनाईए। A से P तथा A से Q को , और B से भी P और B से Q को भी मिलाईए।

अभीष्ट सिद्ध करने के लिए हम त्रिभुज के सर्वसमान के गुणधर्म का उपयोग करते है।



उपपत्तिः

सोपान	**कारण**
Δ PAQ और ΔPBQ में	
AP = BP ; AQ = BQ	समान अर्धव्यास
PQ = PQ	उभयनिष्ठ भुजा
$\therefore$ $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	SSS नियम अथवा भुजा भुजा भुजा नियम
इसलिए $\angle APO = \angle BPO$	सर्वसमान त्रिभुजों के मेल खाने वाले भाग (CPCT)
अब, Δ APO और BPO त्रिभुजों मे	
AP = BP	समान अर्धव्यास
$\angle APO = \angle BPO$	ऊपर सिद्ध किया है।
OP = OP	उभयनिष्ठभुजा
$\therefore$ $\Delta APO \cong \Delta BPO$	SAS नियम
इसलिए OA = OB और $\angle APO = \angle BPO$	सर्वसमान त्रिभुजोंके मेलखानेवाले भाग

जैसेकि $\angle AOP + \angle BOP = 180^\circ$ तथा $\angle AOP = \angle BOP$ रैखिक युग्म

हमे प्राप्त होता है $\angle AOP = \angle BOP = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

	ऊपर दिए हुऐ परिणाम द्वारा
इस तरह, PO, अर्थात POQ यह AB का लम्ब समद्विभाजक है ।	जो हमे सिद्ध करना है ।

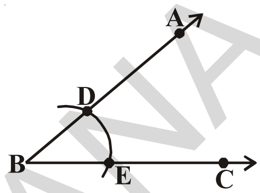
13.2.1 दिए हुए कोण के समद्विभाजक की रचनाः (Angle Bi-Sector)

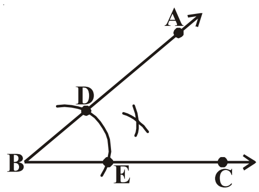
उदाहरणः दिये गए कोण ABC के समद्विभाजक का निर्माण करना

हलः रचना के सोपान

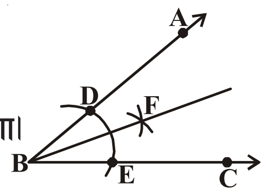
सोपान 1 : दिया गया कोण ABC बनाईए।

सोपान 2 : B को केन्द्र मानकर किसी भी अर्धव्यास से चाप खींचिए जो किरण $\overline{BA}$ और $\overline{BC}$ को क्रमशः D और E पर, आकृति मे दर्शाये अनुसार काटते है।





सोपान 3 : उसी अर्धव्यास से E और D को केन्द्र मानकर दो चाप खीचिए जो एक दूसरे को F पर प्रतिच्छेदित करते है।

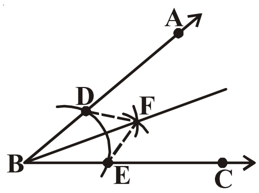


सोपान 4 : किरण BF खींचिए। यहि ∠ABC का अभीष्ट समद्विभाजक होगा।

D, F और E, F. मिलाईए। अभीष्ट सिद्ध करनेके लिए (हम त्रिभुज के सर्वसमान के नियमों का उपयोग करते है।)

उपपत्तिः

सोपान	**कारण**
Δ BDF और ΔBEF में	चयनित त्रिभुज
BD = BE	एक ही चाप के अर्धव्यास
DF = EF	समान अर्धव्यास के चाप
BF = BF	उभयनिष्ठभुजा
∴ ΔBDF ≅ ΔBEF	भुजा भुजा भुजा (SSS) नियम
∠DBF = ∠EBF	सर्वांगसम त्रिभुजों के मेल खानेवाले भाग (CPCT)



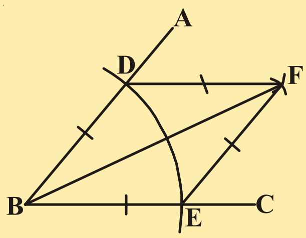
इस तरह ∠ABC का BF समद्विभाजक है। जो सिद्ध करना है

∴ सिध्द होता है।

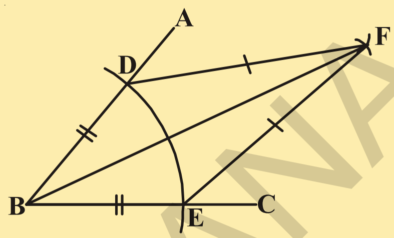
प्रयत्न कीजिए

चतुर्भुज BEFD की भुजाएँ, कोण, कर्ण को ध्यानपूर्वक देखिए। नीचे दी गई आकृतियों के नाम बताकर उनके गुण लिखिए ।

1.



2.

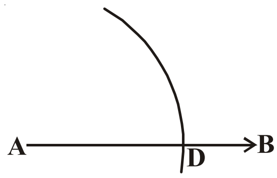


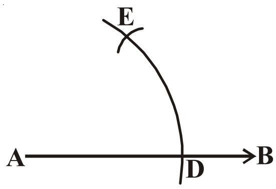
13.2.3 दिये गए किरण के प्रारंभिक बिंदुपर 60° के कोण का निर्माण करना

उदाहरण-3. किरणAB (जिसका प्रारंभिक बिन्दु A है,) और किरण AC का निर्माण इस प्रकार कीजिए कि $\angle BAC = 60°$.

हल: निर्माण के सोपान

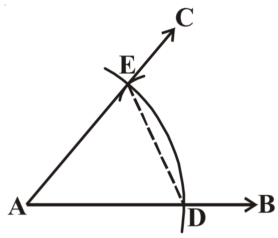
सोपान 1 : दिये गए किरण AB को खींचिए।A को केन्द्र मानकर किसी भी अर्धव्यास से एक चाप खीचिए जो AB को D बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है।





सोपान 2 : D को केन्द्र मानकर उसी अर्धव्यास से पूर्व खींचे गये चाप को E बिंदुपर काँटिए।

सोपान 3 : E से गुजरने वाली किरण AC खींचिए। $\angle BAC$ यह 60° का अभीष्ट कोण निर्मित होगा।



अब हम ऊपर की रचना का तर्क सगंत प्रमाण देते है। पुनः आकृति बनाईए। DE मिलाईए और निम्न प्रकार से सिद्ध कीजिए ।

सोपान	**कारण**
Δ ADE में	
AE = AD	एक ही अर्धव्यास वाले चाप
AD = DE	समान अर्धव्यास के चाप
AE = AD = DE	समान अर्धव्यास वाले चाप
$\therefore$ Δ ADE समबाहु त्रिभुज	सभी भुजाएँ बराबर होती है।
$\angle EAD = 60°$	समभुज त्रिभुज का प्रत्येक कोण
$\angle BAC$ उसी प्रकार जैसे $\angle EAD$	$\angle EAD$, $\angle BAC$ का भाग है।
$\angle BAC = 60^{o}$.	जो हमें सिद्ध करना है

प्रयत्न कीजिए

एक वृत्त बनाइए, इसपर एक बिंदु लीजिए। इसे केंद्र मानते हुए कुछ अर्धव्यास की लंबाई से, अनेक चापों को काटिए। वृत्त कितने भागों में विभाजित होगा? कारण बताइए।

अभ्यास - 13.1

1. दिए गए किरण के प्रारंभिक बिंदुपर निम्न कोण बनाइए और निर्माण का तर्क संगत प्रमाण दीजिए ।

   (a) 90^o (b) 45^o

2. पटरी और प्रकार का उपयोग करते हुए निम्नलिखित कोण बनाइए और चांदे से नापकर उनकी जाँच कीजिए ।

   (a) 30^o (b) $22\frac{1}{2}^o$ (c) 15^o

   (d) 75^o (e) 105^o f) 135^o

3. समभुज त्रिभुज की रचना कीजिए, इसकी भुजा की लम्बाई 4.5 से.मी. दी गयी है और रचना का तर्कसंगत प्रमाण दीजिए ।

4. समद्विबाहु त्रिभुज का निर्माण कीजिए, इसका आधार और आधार के कोण दिए गए है। और निर्माण का तर्कसंगत प्रमाण दीजिए ।

   (संकेतः भुजा और कोण का कोई भी माप आप ले सकते है)

13.3 त्रिभुजों की रचनायें (विशेष उदाहरण)

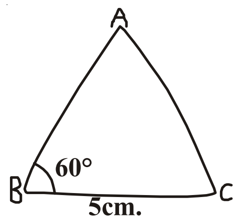
(Construction of Triangle)

अब तक हमने कुछ आधारित रचनाएं बनाई और उनके तर्कसंगत औचित्य भी बताए। अब हम कुछ त्रिभुजों की रचना करेंगे जब विशेष प्रकारके माप दिए हो। त्रिभुज के सर्वांगसमता के गुणों को याद कीजिए जैसे SAS, SSS, ASA और RHS नियम। इससे पहले VII कक्षा मे, ऊपर दिए गए नियमोंका उपयोग करते हुए त्रिभुजोंका निर्माण कैसे किया जाता है? यह आपने सीखा है।

आपने सीखा होगा कि त्रिभुज के निर्माण के लिए कम से कम तीन माप दिए जाने चाहिए परंतु इस उद्देश्य के लिए कीसी भी तीन मापों का कोई भी संयोग पर्याप्त नहीं है। उदाहरण के लिए, यदि दो भुजाएं और एक कोण (भुजाओं के बीचका नही) दिया हो तब ऐसे अन्य त्रिभुज का निर्माण हमेशा संभव नही है। ऐसे निर्माण के लिए हम बहुत उदाहरण प्रस्तुत कर सकते है। ऐसी स्थितियों मे हमे दिये हुए नापोंका वांछित संयोग के साथ इन SAS, SSS, ASA और RHS नियमों का उपयोग करना चाहिए ।

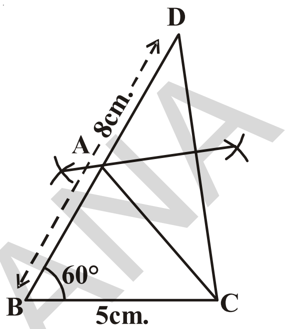
13.3.1 निर्माणः त्रिभुज की रचना, जिस का आधार, आधार का कोण और शेष दो भुजाओं का योग दिया है।

उदाहरण-4. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें है $BC = 5$ से.मी., $AB + AC = 8$ से.मी., और $\angle ABC = 60^o$.



हलः रचना के सोपान

सोपान 1 : ΔABC की कच्ची (Rough)आकृति बनाईए और प्राय, जैसे, दिये हुए मापों को चिन्हित कीजिए। ($AB + AC = 8$ से.मी. को आप कैसे चिन्हत करोगे?)
निर्माण में, तीसरा शीर्ष A का स्थान तुम कैसे निर्धारित करोगे ।



विश्लेषणः जैसे कि दिया गया है $AB + AC = 8$ से.मी. BA रेखा को D तक बढ़ाईए ताकि $BD = 8$ से.मी.

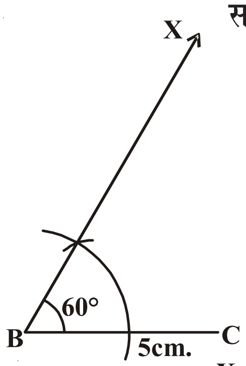
$\therefore$ $BD = BA + AD = 8$ से.मी.

परन्तु $AB + AC = 8$ से.मी. (दिया है)

$\because$ $AD = AC$

BD पर A का स्थान निर्धारित करने के लिए तुम क्या करोगे?

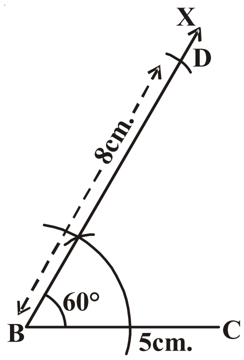
चूँकि A बिंदु, C और D से समानदूरी पर है, $\overline{CD}$ का लम्ब - समद्विभाजक खींचिए जो BD पर A का स्थान निर्धारित करेगा।



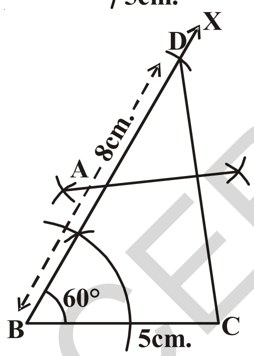
$AB + AC = BD$ को कैसे सिद्ध करोगे ?

सोपान 2 : $BC = 5$ से.मी खींचिए

और $\angle CBX = 60^\circ$ कोण B पर बनाईए।

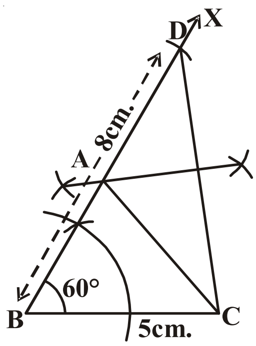


सोपान 3: B को केन्द्र मानकर 8 से.मी. ($AB + AC = 8$ से.मी) अर्धव्यास लेते हुए $\overrightarrow{BX}$ पर एक चाप लगाइए जो D पर काटता है ।



सोपान 4 : C,D को मिलाईए तथा CD का समद्विभाजक खींचिए जो BD को A पर काटता है।

सोपान 5: A,C को मिलाईए । अभीष्ट त्रिभुज ABC प्राप्त होगा ।



अब, हम निर्माण का रचनाक्रम बतायेंगे।

उपपत्ति : $\overline{CD}$ के लम्ब समाद्विभाजक पर A स्थित रहता है।

$\because$ $AC = AD$

$AB + AC = AB + AD$

$= BD$

$= 8$ से.मी.

अतः, ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है ।

विचार-विमर्श कीजिए और लिखिएः

क्या तुम त्रिभुज ABC का निर्माण कर सकोंगे जिसमें BC = 6 से.मी, $\angle B = 60^\circ$ और AB + AC = 5 से.मी.? यदि नही, तो कारण बताइए।

13.3.2 निर्माणः यदि आधार, आधार का कोण और शेष दो भुजाओं का अन्तर दिया गया है तो त्रिभुज का निर्माणः

दिया गया हैः त्रिभुज ABC में BC आधार तथा आधार का कोण मान लीजिए $\angle B$ है और शेष दो भुजाओं मे अन्तर, यदि AB>AC AB – AC या यदि, AB<AC AC-AB, तुम्हे त्रिभुज ABC की रचना करना है। इस तरह, निम्न उदाहरणों में हम रचना के दो स्थितियों की चर्चा करेंगे ।

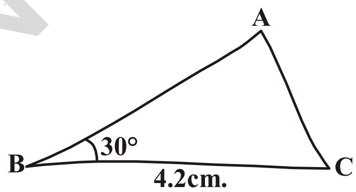
स्थिति (i) मान लिजिए AB > AC

उदाहरण-5. ΔABC, जिसमें BC = 4.2 से.मी $\angle B = 30^\circ$ और AB – AC = 1.6 से.मी

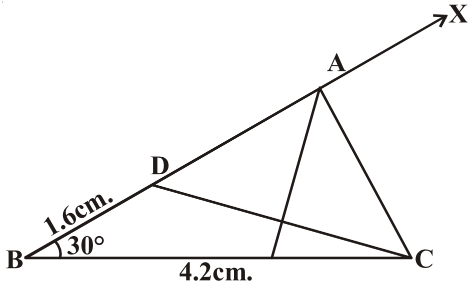
हल : रचना के सोपानः

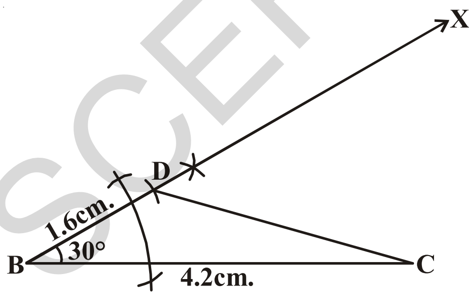
सोपान 1: ΔABC की कच्ची (Rough) आकृति बनाईए और दिए हुए मापों को चिन्हित कीजिए।

(AB – AC = 1.6 से.मी को कैसे चिन्हित करोगे ?)



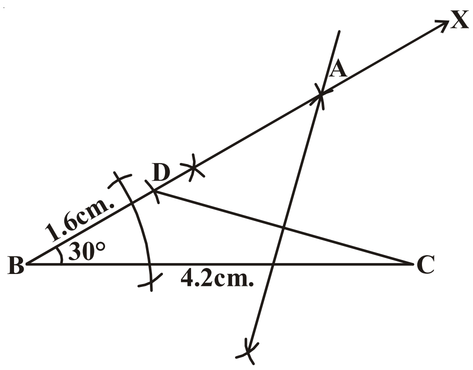
विश्लेषण : चूँकि AB – AC = 1.6 से.मी और AB > AC, D बिंदु AB पर इस प्रकार चिन्हित कीजिए की AD = AC अब BD = AB – AC = 1.6 से.मी, CD में मिलाईए और CD का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जिसके बढ़ाए गए BD पर शीर्ष A प्राप्त होगा।



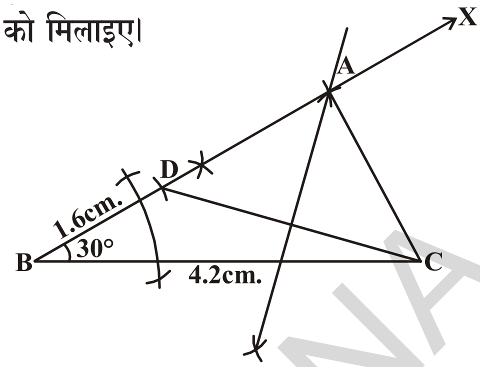


सोपान 2: S.A.S नियम का उपयोग करते हुए त्रिभुज BCD बनाईए जिसमे BC = 4.2 से.मी $\angle B = 30^0$ और BD = 1.6 से.मी (अर्थात AB - AC)

सोपान 3 : CD का लम्ब समद्विभाजक खींचिए। जो किरण BDX को बिंदु A पर काटता है।



सोपान 4: अभिष्ट त्रिभुज ABC प्राप्त करने के लिए AC को मिलाइए।



विचार विमर्श कीजिए और लिखिए

क्या तुम त्रिभुज ABC बना सकते है जिसमे आधार कोण $\angle B$ के अलावा $\angle C$ लेते हुए, शेष माप वही हो? कच्ची आकृति बनाईए और इसकी रचना कीजिए ।

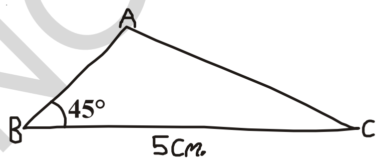
स्थिति (ii) माना कि $AB < AC$

उदाहरण-6. ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = 5$से.मी, $\angle B = 45^o$ और $AC - AB = 1.8$ से.मी. है।

हल: निर्माण के सोपान.

सोपान 1: ΔABC की कच्ची आकृति बनाईए और दिए हुए माप चिन्हित कीजिए।

$AC - AB = 1.8$ से.मी को कैसे अंकित करेंगे, विश्लेषण कीजिए।



विश्लेषण : चूँकि $AC - AB = 1.8$ से.मी अर्थात $AB < AC$, हमें बढ़ाये हुए भुजा AB पर D इस प्रकार ज्ञात करना है कि $AD = AC$

अब $BD = AC - AB = 1.8$ से.मी ($\because$ $BD = AD - AB$ और $AD = AC$)

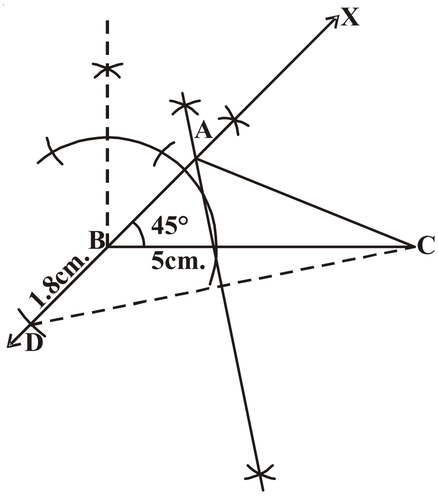
DC के लम्ब समद्विभाजक पर A ज्ञात करने के लिए CD मिलाईए।

सोपान 2 :$BC = 5$ से.मी खींचिए और$\angle CBX = 45°$ बनाइए।

B को केन्द्र मानकर और अर्धव्यास 1.8 से.मी ($BD = AC - AB$) लेते हुए, बढाये हुए XB पर बिंदु D पर प्रतिच्छेद करनेवाला चाप खींचिए।

सोपान 3 : DC मिलाईए और DC का लम्ब समद्विभाजक खींचिए।

सोपान 4 :माना कि वह $\overrightarrow{BX}$ को बिंदु A पर मिलता है। AC मिलाईए। ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है। अब, तुम निर्माण को तर्कसंगत प्रमाणित कर सकते है।



उपपत्ति:ΔABC में, DC के लम्ब द्विभाजक पर बिंदु A स्थित है।

$\therefore$ $AD = AC$

$AB + BD = AC$

इसलिए $BD = AC - AB$ $= 1.8$ से.मी

अतः ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

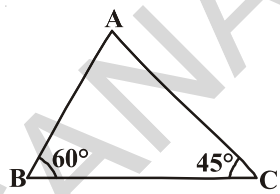
13.3.3 आधार के दो कोण दिए गए हो तो त्रिभुज का निर्माणः

आधार के कोण मान लीजिए $\angle B$ और $\angle C$ और परिमाप $AB + BC + CA$ ज्ञात हो तो उससे त्रिभुज का निर्माण कीजिए।

उदाहरण-7. ABC, का निर्माण कीजिए जिससे $\angle B = 60^o$, $\angle C = 45^o$ तथा

$AB + BC + CA = 11$ से.मी. है।

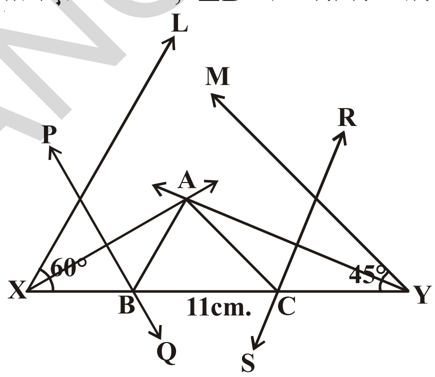
हल : निर्माण के सोपान :



सोपान1 : त्रिभुज ABC की कच्ची (Rough) आकृति बनाइए दिए गए नापों को अंकित कीजिए।

(क्या तुम त्रिभुज कापरिमाप अंकित कर सकते हो?)

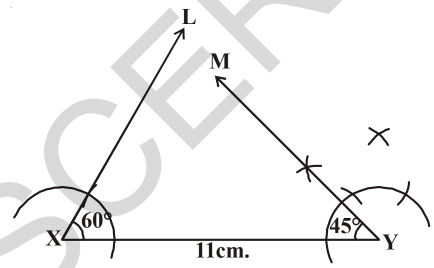
विश्लेषण : एक रेखाखण्ड, मान लीजिए XY जो ΔABC के परिमाप के बराबर अर्थात $AB + BC + CA$. के बराबर खींचिए। $\angle YXL$, $\angle B$ के बराबर और $\angle XYM$, $\angle C$ के बराबर बनाईए। इन्हे समद्विभाजित कीजिए।



माना कि ये समद्विभाजक बिंदु A पर प्रतिच्छेद करते है। AX का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो XY को B पर काटता है तथा AY को C पर काटता है। उसके बाद AB और AC मिलाने पर हमे अभीष्ट त्रिभुज ABC प्राप्त होता है।

Step 2: रेखाखण्ड $XY = 11$ से.मी. खींचिए। $(XY = AB + BC + CA)$

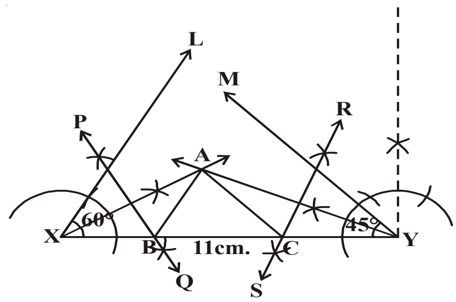
सोपान 3 : रेखाखण्ड $\angle YXL = 60^o$ और $\angle XYM = 45^o$ का निर्माण कीजिए और इन कोणों के समद्विभाजक खींचिए।



सोपान4 : माना कि इन कोणों के समद्विभाजक बिंदु A पर प्रतिच्छेद करते है। AX औरAY मिलाइए।

सोपान 5 :AX और AY के लम्ब द्विभाजक खींचिए जो क्रमशः $\overrightarrow{XY}$ को B और C पर प्रतिच्छेद करते है। AB और AC मिलाइए।

ΔABC यह अभीष्ट त्रिभुज होगा।



आप रचना का प्रमाण निम्न प्रकार से दे सकते है।

उपपत्ति: AX के लम्ब समद्विभाजक PQ पर B बिन्दु स्थित है।

$\therefore$ XB = AB और इसी प्रकार CY = AC

AB + BC + CA = XB + BC + CY

= XY

पुनः $\angle BAX = \angle AXB$ ($\because$ XB = AB मे ΔAXB) और

$\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB$

(ΔABC का वाह्य कोण).

$= 2\angle AXB$

$= \angle YXL$

$= 60^o$.

इसी प्रकार $\angle ACB = \angle XYM = 45^o$ जो अभीष्ट है।

$\therefore$ $\angle B = 60°$ और $\angle C = 45°$ जैसा दिया है, वैसा निर्माण हुआ।

प्रयत्न कीजिए

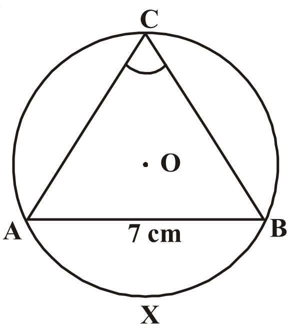
क्या आप किसी अन्य विधि से यही त्रिभुज बना सकते हैं?

(संकेतः $\angle YXL = \frac{60°}{2} = 30°$ और $\angle XYM = \frac{45°}{2} = 22\frac{1}{2}°$ लीजिए)

13.3.4 रचनाः दी गई जीवा (ज्या) और दिए गए कोण से वृत्तखण्ड का निर्माण

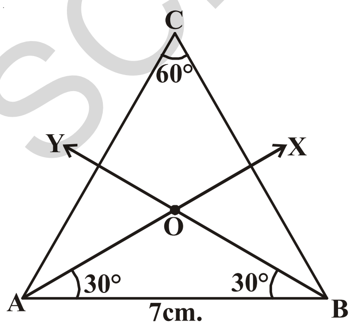
उदाहरण-8. 7से.मी. लम्बाई की जीवा पर वृत्तखण्ड का निर्माण कीजिए जिसमे 60° का कोण बना है।

हल : निर्माण के सोपान



सोपान-1: वृत्त और 60° कोण का वृत्त खण्ड का कच्चा (Rough) रेखाचित्र बनाइए। (बडा वृत्तखण्ड बनाइए) क्या तुम केन्द्र के बिना वृत्त बना सकते है?

विश्लेषण: माना कि 'O' केन्द्र है। दी हुई जीवाAB और अभीष्ट वृत्तखण्ड ACB जिसमे कोण C = 60°.



माना कि C पर कोण बनानेवाला वृत्तांश (चाप) $\overset{\frown}{AXB}$ है।

$\angle ACB = 60°$, $\angle AOB = 60° \times 2 = 120°$

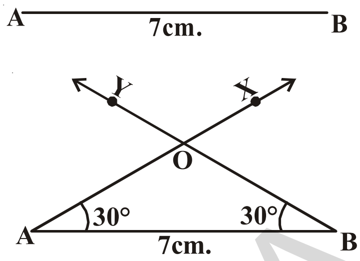
ΔOAB में OA=OB (एकही वृत्त के अर्धव्यास)

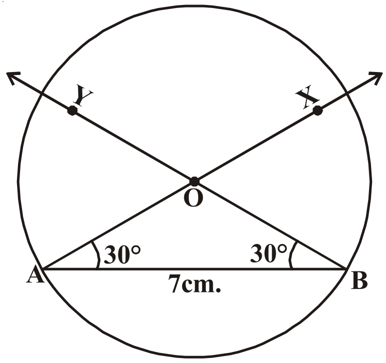
$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

इसलिए, हम ΔOAB का निर्माण कर सकते है। तत्पश्चात OA या OB के बराबर अर्धव्यास लेते हुए वृत्त बनाइए।

सोपान-2 :रेखाखण्ड AB = 7 से.मी खींचिए।

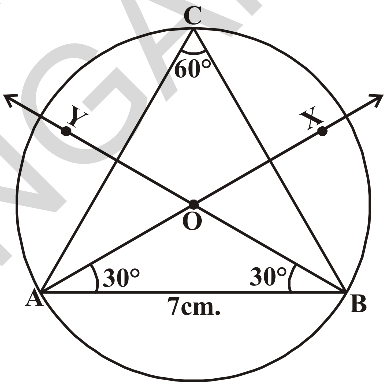
सोपान-3 : $\overrightarrow{AX}$ इस प्रकार खींचिए कि $\angle BAX = 30°$ और $\overrightarrow{BY}$ इस प्रकार खींचिए कि $\angle YBA = 30°$ और $\overrightarrow{AX}$ को O पर प्रतिच्छेदित करता है।
[संकेत : कोण 60^o को समद्विभाजित करते हुए 30^o का कोण बनाइए।]





सोपान-4 : 'O' को केन्द्र मानते हुए OA या OB, अर्धव्यास का वृत्त बनाइए।

सोपान-5 : वृत्त के चाप (वृत्तांश) पर बिन्दु C चिन्हित कीजिए। AC और BC मिलाइए। $\angle ACB = 60°$ प्राप्त होता है।



इस प्रकार ACB अभीष्ट वृत्तखण्ड बनेगा।

अब हम निर्माण का रचनाक्रम देखेंगे।

उपपत्ति : OA = OB (वृत्त के अर्धव्यास).

$\therefore \quad \angle OAB + \angle OBA = 30° + 30° = 60°$

$\therefore \quad \angle AOB = 180° - 60° = 120°$

$\overset{\frown}{AXB}$ वृत्तांश, वृत्त के केंद्र पर 120° का कोण बनाता है।

$$\therefore \quad \angle ACB = \frac{120°}{2} = 60°$$

$\therefore$ ACB यह अभिष्ट वृत्तखण्ड है।

प्रयत्न किजिए :

यदि वृत्तखण्ड का कोण समकोण हो। तुम्हे किस प्रकार का वृत्तखण्ड प्राप्त होगा? आकृति बनाइए और कारण दीजिए।

अभ्यास - 13.2

1. ΔABC की रचना कीजिए जिसमे BC = 7 सेमी, $\angle B = 75^\circ$ और AB + AC = 12 से.मी
2. ΔPQR की रचना कीजिए जिसमे QR = 8 से.मी, $\angle Q = 60°$ और PQ – PR = 3.5 से.मी
3. ΔXYZ का निर्माण कीजिए जिसमे $\angle Y = 30^\circ$, $\angle Z = 60^\circ$ और XY + YZ + ZX = 10 से.मी.

4. समकोण त्रिभुज बनाइए जिसका आधार 7.5cm. से.मी और इसके कर्ण और दूसरी भुजा का योग 15सेमी।
5. 5सेमी लम्बाई की जीवा (ज्या) पर वृत्तखण्ड बनाइए जिसमे निम्न कोण सम्मिलित है।
   i. 90° ii. 45° iii. 120°

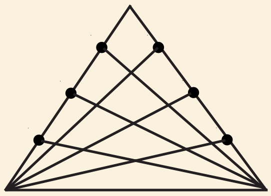
हमने क्या सिखा?

1. ज्यामितीय निर्माण एक ज्यामितीय आकृतियाँ बनाने की प्रक्रिया है जिसमे केवल दो उपकरणों - रेखांकित पटरी और प्रकार का उपयोग किया जाता है।
2. रचनाक्रम (तार्किक उपपत्ति) के साथ निम्न ज्यामितीय आकृतियों का निर्माण
   - दिए गए रेखाखण्ड का लम्ब समद्विभाजक
   - दिए गए कोण का समद्विभाजक
   - दिए हुए किरण के प्रारंभिक बिंदु पर 60° कोण का निर्माण
3. त्रिभुज का निर्माण, जिसका आधार, आधार का कोण और शेष दो भुजाओं का योग ज्ञात हो।
4. त्रिभुज की रचना, जिसका आधार, आधार के कोण और शेष दो भुजाओं मे अंतर दिया गया हो।
5. त्रिभुज का निर्माण, जिसका परिमाप और इसके आधार के दो कोण दिए गए हो।
6. वृत्तखण्ड का निर्माण, इसकी जीवा और कोण दिया गया हो।

दिमागी खेल

आकृति में कितने त्रिभुज है ?

(यह 'सीवियन' त्रिभुज जिसेगणितज्ञ ''सीवा'' के सम्मान में नाम दिया गया है, का सूत्र लिखिए।)



(**संकेत:** माना कि प्रत्येक शीर्ष से इसके सम्मुख की भुजा पर खींची गई रेखाओं की संख्या - 'n'होगी।)

14 प्रायिकता
(Probability)

प्रायिकता सिद्धांत गणनाओं को सरल बनाने वाली सहज बुद्धि है।

- Pierre-Simon Laplace

14.1 परिचय

सिद्‌दू और विवेक दोनों सहपाठी हैं। एक दिन भोजन के समय आपस में बातचीत कर रहे थे। उनके संभाषण पर ध्यान दीजिए।

सिद्‌दू : हेलो विवेक आज शामको आप क्या करने वाले हैं?

विवेक : संभवतः मैं भारत और आस्ट्रेलिया के बीच खेले जारहे क्रिकेट मैच देखूँगा।

सिद्‌दू : आप क्या सोंचरहे हैं, टॉस कौन जीतेगा?

विवेक : दोनों टीमों को बराबर-बराबर संयोग है।

क्या आप अपने घर में क्रिकेट मैच देखते हैं?

सिद्‌दू : मुझे अपने घर में टी.वी. देखने का संयोग नहीं है, क्यों की अपने टी.वी. मरम्मत के लिए दी गई है।

विवेक : ओह! तो आप हमारे घर पर आजायेंगे, हम दोनों साथ में मैच देखेंगे?

सिद्‌दू : मैं अपना होमवर्क पूरा करके आऊँगा।

विवेक : कल अक्तूबर 2तारीख़ है। गाँधी जी के जन्मदिन के अवसर पर हमें छुट्टी है।इसलिए आप होमवर्क क्यों नहीं करते?

सिद्‌दू : नहीं, पहले मैं अपना होमवर्क करके ही आपके घर आऊँगा।

विवेक : ठीक है।

ऊपर के संभाषण के अनुसार निम्न कथनों पर ध्यान दीजिए।

अधिक संभवतः, मैं भारत और के आस्ट्रेलिया के बीच खेले जारहे क्रिकेट मैच देखूँगा।

मुझे क्रिकेट मैच देखने का अवसर नहीं है।

टॉस जीतने का संभावना दोनों टीमों के लिए समान है।

यहाँ, विवेक और सिद्‌दू सहीं संभावना का फ़ैसला कर रहे थे।

अनेक संदर्भों में निर्णय लेने के लिए हम अपने पिछले अनुभव और तर्क प्रयोग करके बयान निर्णय लेते हैं।

यह एक उज्वल और मनोहर दिन है। हमें छाता लेजाने की आवश्यकता नहीं है और मैं जाने का एक मौका लूँगा।

लेकिन निर्णय हमेशा हमारा साथ नहीं देगा। एक ऐसी स्थिति को ध्यान दीजिए कि मेरि बरसात के समय अपनी रैनकोट को हरदिन लेकर जाती थी। उन्होंने इस प्रकार रैनकोट को बहुत सारे दिन लेकर गई थी लेकिन एक दिन भी बारिश नहीं हुई थी। पर जिस दिन वह अपना रैनकोट भूल गई थी, उसी दिन तेज़ बारिश हुई थी।

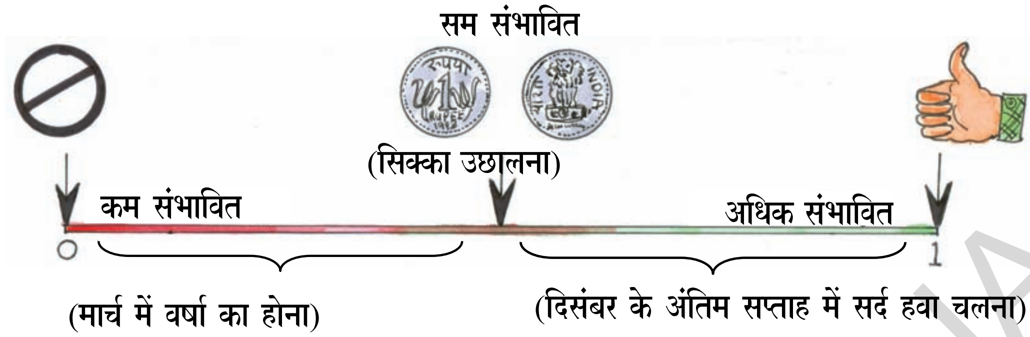
साधारणतः गर्मी के मौसम मार्च से शुरू होता है। लेकिन उस मास के एक दिन शाम में तेज़ बारिश हुई। सौभाग्य से मैं भीगने से बच गई थी, क्यों कि हमेशा की तरह उस दिन भी छाता लेकर गई थी।

इस प्रकार अनुमान लगा कर निर्णय ले सकते हैं कि भविष्य में घटना घटने की कितनी संभावना है। ऊपर के दोनों स्थितियों में मेरि ने अनुमान लगाया कि उस दिन बारिश होना या न होने की संभावना है या नहीं। (क्यों?)

घटना की संभावना को हम संख्यात्मक रूप से मापने का प्रयत्न करते हैं, जैसा हम अपने दैनंदिक जीवन के अनेक वस्तुओं को मापते हैं। इस प्रकार के मापन हमें क्रम पद्धति में निर्णय लेने में सहायता देगी। इस लिए किसी घटना घटने के संयोग को संख्यात्मक रूप में लिखने के लिए प्रायिकता का अध्ययन करते हैं।

ऊपर विचार करने वाले स्थितियों को संख्यात्मक रूप से मापने से पहले हम इनको नीचे की तालिका में दिये गए शब्दों से ग्रेडिंग करते हैं। अब आप नीचे दिये गए तालिका पर ध्यान दीजिए।

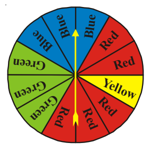
पद	संयोग	संभाषण से उदाहरण
निश्चित	ज़रूर कुछ होने वाला है।	गाँधी जी का जन्मदिन अक्तूबर 2को है।
अधिक संभावित	कुछ होने का ज्यादा संयोग है।	विवेक क्रिकेट मैच देख रहा है।
सम संभावित	कुछ होने या न होना का समान संयोग।	दोनों टीमों की टॉस जीतने की समान संभावना।
कम संभावित	कुछ होने का कम संयोग।	विवेक का मैच के दिन होमवर्क करने की संभावना।
असंभव	कुछ हो नहीं सकना।	सिद्दू का अपने घर क्रिकेट मैच देखना।



इसे कीजिए

1. पिछले पन्ने में दिये गए तालिका के ध्यान में रख कर प्रत्येक पद को कुछ और उदाहरण दीजिए।
2. निम्न कथनों को कम संभावित, सम संभावित और अधिक संभावित में वर्गीकृत कीजिए।
   अधिक संभावित
   a) एक पॉसा फेंकने पर ऊपरी सतह पर 5 आना।
   b) आपके गाँव में नवंबर में सर्द हवाएँ चलना।
   c) भारत का अगले फ़ुटबाल (विश्वकप) का जीतना।
   d) सिक्के को उछालने पर चित या पट का आना।
   e) एक लाटरी टिकेट खरीद कर जॉकपाट जीतना।

14.2 प्रायिकता



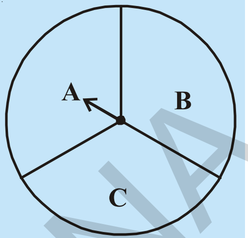
14.2.1 ऐच्छिक प्रयोग और परिणाम (Random experiment & Outcomes)

संयोग को समझने के लिए और मापने के लिए हम सिक्के उछालना, पासा फेंकना, चक्र घुमाना आदि प्रयोग करते हैं। जब हम सिक्का उछालते हैं तो दो संभव परिणाम, चित या पट का परिणाम पाते हैं। समझो आप एक क्रिकेट टीम के कप्तान और आपका मित्र दूसरे टीम का कप्तान तो आप सिक्का उछाल कर अपने मित्र से पूछो कि उसे चित या पट में से क्या चाहिए? क्या आप टॉस के परिणाम को नियंत्रित कर सकते हो? क्या आप अपने इच्छा से चित या पट पा सकते हो? यह एक साधारण सिक्के से संभव नहीं है। दोनो में कोई एक पाने का संयोग समान है और हम कुछ नहीं कह सकते कि क्या पाएँगे। इस तरह सिक्का फेंकने का प्रयोग एक एच्छिक प्रयोग कहलाता है। इस प्रकार के प्रयोगों में संभव परिणाम को जानते हुए भी विशेष समय का सही परिणाम पहले ही प्राप्त नहीं कर सकते। एच्छिक प्रयोग में परिणाम सम संभव होगा या नहीं। सिक्के को उछालने के प्रयोग में दो संभव परिणाम है, चित या पट का।

* पासा एक संतुलित घन होता है जिस में छे फ़लक होते हैं जिन पर 1 से 6 तक की संख्या अंकित होती है। कभी कभी संख्या के स्थान पर उतने ही बिंदु होते हैं।

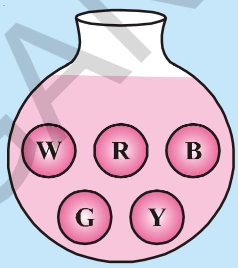
प्रयत्न कीजिए

1. यदि आप एक स्कूटर चालू करना चाहते हो तो, संभव परिणाम क्या हैं?
2. यदि आप एक पासा फेंके तब उसके छे संभव परिणाम क्या हैं?
3. चित्र में दिखाये गए पहिए को घुमाने पर क्या परिणाम होंगे? (यहाँ परिणाम अर्थात वह क्षेत्र जहाँ सूचक हो)



4. एक जार में विभिन्न रंगों की पाँच समरूप गेंद हैं।

   (सफेद,लाल,नीला,घूसर और पीला) और आप को बिना देखे एक गेंद को चुनना है। तो संभव परिणाम लिखिए।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक पासा फेंकिए।

- क्या पहला खिलाड़ी को ऊपरी सतह पर छे अंक पाने की संभावना अधिक है?
- क्या उसके बाद खेलनेवाले खिलाड़ी को ऊपरी सतह पर 6 अंक पाने की संभावना कम है?
- मान लीजिए कि दूसरे खिलाड़ी ने ऊपरी सतह पर 6 अंक पाया। क्या इसका अर्थ यह है कि तीसरे खिलाड़ी को 6 अंक पाने की कोई संभावना नहीं है?

14.2.2 सम संभावित परिणाम

(Equally likely *outcomes*)

मानलीजिए कि हम एक सिक्का उछालते या पासा फेंकते हैं तो सिक्का या पासा अच्छा और निष्पक्ष है। और सिक्के या पासा को प्रयोग करने पर सभी का परिणाम समान होगा। हम एक प्रयोग करते हैं, एक सिक्के को बार-बार उछाल कर चित या पट का परिणाम लिखिए। इल आंकड़ों के प्रदत्त से हम परिणाम में होने वाले परिवर्तन को जान सकते हैं।

एक सिक्के को बार-बार उछालने पर हमें चित और पट के परिणाम अंकित करें। अब परिणाम सूचि देखें जहाँ सिक्का उछालने की संख्या बढते जाती है।

सिक्का उछालने की संख्या	मिलान चिन्ह (H)	चितों की संख्या	मिलान चिन्ह (T)	पटों की संख्या
50	卌 卌 卌 卌 ||	22	卌 卌 卌 卌 卌 |||	28
60 卌 |	卌 卌 卌 卌	26 卌 卌 ||||	卌 卌 卌 卌	34
70	......	30	......	40
80	......	36	......	44
90	......	42	......	48
100	......	48	......	52

ऊपर की तालिका से यह मालूम होता है कि उछालों की संख्या जितनी बढेगी चितों और पटों की संख्या भी उतनी ही बढेगी।

इसे हल कीजिए

नीचे दिये गए तालिका के संख्या के अनुसार सिक्के को उछालिए और प्रश्नों को तालिका में लिखिए।

सिक्का उछालने की संख्या	चित की संख्या	पट की संख्या
10		
20		
30		
40		
50		

यदि सिक्का उछालने की संख्या बढ़ाने पर क्या होगा।

इसे आप पासा अधिक बार फेंक कर भी ध्यान दे सकते हैं।

पासा फेंकने की संख्या	प्रत्येक परिणाम आने की संख्या (i.e. प्रत्येक अंक ऊपरी सते पर दिखाई देने की संख्या)					
	1	2	3	4	5	6
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

ऊपर दी गई तालिका से आप देखेंगे कि जैसे-जैसे पासा फेंके जाने की संख्या बढ़ती जायेगी, वैसे-वैसे छे परिणामों में प्रत्येक परिणाम की संख्या लगभग समान होती जायेगी।

ऊपर के दोनों प्रयोगों से हम यह कह सकते हैं कि प्रयोग में प्रत्येक परिणाम सम संभव है। इस का मतलब है कि प्रत्येक परिणाम आने का संयोग समान है।

14.2.3 अभिप्रयोग और घटनाएँ (Trail and Events)

ऊपर के प्रयोग में एक बार सिक्का उछालना या एक बार पासा फेंकने के प्रयत्न को याद्दच्छिक प्रयोग कहते हैं।

पासा फेंकने के प्रयत्न पर ध्यान दीजिए।

ऊपरी सतह पर 5 अंक से अधिक अंक आने का संभव परिणाम कितना होगा? यह केवल एक है।(i.e., 6)

ऊपरी सतह पर सम संख्या आने का संभव परिणाम कितना होगा?

वह 3 है। (2,4, और 6).

इस प्रकार एक प्रयोग के प्रत्येक सुनिश्चित परिणाम या सुनिश्चित परिणामों के संग्रह से एक घटना बनती है।

ऊपर के प्रयत्न में 5 अंक से अधिक प्राप्त करना और ऊपरी संख्या का प्राप्त करना दो घटनाएँ हैं। ध्यान दीजिए कि घटना एक ही परिणाम होना आवश्यक नहीं। लेकिन प्रयोग का प्रत्येक परिणाम एक घटना होता है।

यह हम घटना के मूल भाव को समझते हैं। घटना के बारे में और जानकारी अगली कक्षा में सीखते हैं।

14.2.4 संयोग को प्रायिकता से जोडना (Linking the chance to Probability)

सिक्के को एक बार उछालने का प्रयोग पर ध्यान दीजिए। परिणाम क्या है? यहाँ दो ही परिणाम है। चित या पट और दोनों ही परिणाम समप्रायिक है। एक चित पाने का संयोग क्या है? यह दो संभव परिणामों में से एक है।

अर्थात $\frac{1}{2}$ है। इसे हम अन्य शब्दों में भी प्रकट कर सकते हैं। जैसे

जब एक सिक्के को तीन बार ऊछालने पर एक चित आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ जिसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं कि-

$$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ या } 50\%$$

एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

अब आप एक पासे को फेंकने का उदाहरण पर विचार कीजिए। एक बार फेंकने पर संभव परिणाम कितना होगा? यहाँ छे सम प्रायिक परिणाम 1,2,3,4,5,या 6 है।

ऊपरी सतह पर विषम संख्या पाने का प्रायिकता क्या है? छे संभव परिणामों में तीन अनुकूल परिणाम-

1, 3 या 5 हैं। यह $\frac{3}{6}$ या $\frac{1}{2}$ है।

एक घटना 'A' का प्रायिकता का सूत्र इस प्रकार लिखते हैं-

$$P(A) = \frac{\text{घटना A आने का अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव कुल परिणामों की संख्या}}$$

अब हम कुछ और उदाहरणों पर ध्यान देंगे।

$$P(A) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिसमें घटना घटी है।}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

उदाहरण 1: यदि दो समरूप सिक्के एक ही समय पर उछाले जायें तो ज्ञात कीजिए कि
(a) संभव परिणाम (b) परिणामों की कुल संख्या (c) दो चित आने की प्रायिकता (d) कम से कम एक चित आने की प्रायिकता (e) एक भी चित न आने की प्रायिकता (f) केवल एक चित आने की प्रायिकता

हल : (a) संभव परिणाम हैं

सिक्का -1	सिक्का 2
चित	चित
चित	पट
पट	चित
पट	पट

b) संभव परणिामों की संख्या 4 है।

c) दो चित आने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{दो चित आने की संभावना}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}} = \frac{1}{4}$$

d) कम से कम एक चित आने की प्रायिकता $= \frac{3}{4}$

[कम से कम एख पित माने एक या अधिक बारचित आने की संख्या]

e) एक चित भी न आने की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$.

f) एक दी चित आने की प्रायिकता $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

यह कीजिए।

1. यदि तीन सिक्के एक दो बार उछाल दिये जायें तो परिणामों को ज्ञात कीजिए ।

a) संभव कुल परिणाम

b) संभव कुल परिणामों की संख्या

c) कम से कम एक चित आने की प्रायिकता
(एक या एक से अधिक चित आने का)

d) ज्यादा से ज्यादा दो चित आने की प्रायिकता
(दो या दो से कम चित आना)

e) एक भी पट नहीं आने की प्रायिकता

उदाहरण 2 : (a) जब एक पासा फेंकतो प्रत्येक अंक ऊफरी सतह पर आने की प्रायिकता को नीचे दिए गए तालिका में लिखिए। (b) सबी परिणामों के प्रायिकता के योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: (a) पूरे छः संभव परिणामों में 4 आने की संभावना केवल एक ही है। इस प्रकार प्रायिकता 1/6 है। इसी प्रकार तालिका के रिक्त स्थानों को भरिए।

परिणाम	1	2	3	4	5	6
प्रायिकता (P)				1/6		

(b) सभी प्रायिकताओं का योगफल

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

अब हम इसका सामान्यीकरण इस प्रकार कर सकते है कि सभी प्रायिकताओं का योगफल हमेशा एक हो।

प्रयत्न कीजिए

जब एक पासें को एक बार फेंकेगे तो प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

घटना	अनुकूल परिणाम	अनुकूल परिणाम या परिणामें की संख्या	कुल संभव परिणाम	कुल संभव परिणाम की संख्या	प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}}$
ऊपरी सतह पर 5 अंक अनेक	5	1	1, 2, 3, 4, 5 और 6	6	1/6
ऊपरी सतह पर 3 अंक से अधिक आना					
ऊपरी सतह पर अभाज्य संख्या अनेक					
ऊपरी सतह पर 5 से कम अनेक					
ऊपरी सतह पर 6 के गुणन खण्ड अनेक					
ऊपरी सतह पर 7 से अधिक अनेक पर					
ऊपरी सतह पर 3 के गुणक आने पर					
ऊपर सतह पर 6 या 6 से कम संख्या आने के लिए					

आप यह अवलोकन करेंगे।

प्रत्येक घटना की प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के बीच होती है। (0 और 1 को मिलाकर)

$0 \leq$ प्रत्येक घटना की प्रायिकता ≤ 1

a) एक निश्चित घटना की प्रायिकता $= 1$

b) एक घटना की प्रायिकता की असंभावना 0 है।

14.2.5 स्वयं प्रयोग कर देखिए ।

1. आप कक्षा के विद्यार्थियों को 3या 4 के समूह में बाँट दीजिए । सभी समूहों के विद्यार्थी समान मूल्यों के एक जैसे सिक्कों का प्रयोग करेंगे । प्रत्येक समूह का एक विद्यार्थी सिक्के को 20 बार उछालेगा । तथा दूसरा विद्यार्थी परिणामों को रिकार्ड करेगा । सभी समूहों के परिणामों को नीचे दिए गए तालिका में ड़ालिए ।

वर्ग	उछालों की संख्या	उछालों की संयी संख्या	चितों की संख्या	चितों की संययी संख्या	चितों की संख्या / सिक्का उछलने की कुल संख्या	पटों की संचयी संख्या / सिक्का उछाले की कुल संख्या
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20} = \frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40} = \frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

इस सारणी में आप क्या देखते है? आप देखेंगे कि सिक्के की उछालने की संख्या में वृद्धि होने पर स्तंभ (6) और (7) के भिन्नों के मान निकट होते जाते हैं । अर्थात् जब आप उछालो की संख्या अधिकाधिक बढायेंगे, तब चित या पट प्राप्त करने की प्रायिकता और निकट होती जाती हैं।

2. इस क्रियाकलाप को 3 या 4 समूहों में कर सकते हैं । प्रत्येक समूह के एक विद्यार्थी को एक पासा 30 बार डालने के लिए कहिए । प्रत्येक समूह का दूसरा विद्यार्थी परिणामों को तालिका में लिखेगा । ध्यान दीजिए कि सभी समूह के लोग समरूप पासों का प्रयोग करेंगे । पासे को फेंके जाते समय ऐसा प्रतीत होना चाहिए कि सभी समूहों द्वारा केवल एक ही पासा फेंका जा रहा हैं।

पासों की फेंकने की संख्या	पासे पर इन अंकों के आने की संभावनाएँ					
	1	2	3	4	5	6
30						

सभी समूहों के परिणामों की सहायता से नीचे दिए गए तालिका की पूर्ति कीजिए।

Group(s) समूह(s)	1 आने की संभावना	पासे फेंकने की कुल संख्या	$\frac{\text{1 आने की संभावना}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1^{st} $1^{st}+2^{nd}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}+5^{th}$			

इस सारणी में आप क्या देखते है? आप देखेंगे कि पासे की फेंकने की संख्या में वृद्धि होने के साथ-साथ स्तंभ (4) का मूल्य $\frac{1}{6}$ के निकट होते जाएगा है। ऊपरी प्रयोग हमने संख्या 1 केलिए किया है । 2 और 5 के लिए प्रयोग करके परिणामों की जाँच कीजिए।

स्तंभ (4) में प्राप्त भिन्नों के मान के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकालते है? इसे फेंक कर 1, 2, तथा 5 प्राप्त करने की प्रायिकता से तुलना कीजिए ।

3. यदि दो सिक्कों को एक ही साथ उछालेंगे तो क्या होगा? दोनों सिक्के दो चित या दो पट या एक चित और एक पट बताएगा । क्या इन तीनों की प्रायिकता समान होगी ? जब आप यह सामूहिक क्रिया कलाप करते है । आप इसके बारे में सोचिए ।

आप कक्षा को 4 विद्यार्थीयों के समूह में बाँट दीजिए । प्रत्येक समूह को समान मूल्य और समरूप दो सिक्के दीजिए । प्रत्येक समूह को दोनों सिक्कों को एक ही साथ 20 बार उछालने के लिए कहिए तथा परिणामों को इस तालिका में नोट कीजिए ।

दो सिक्कों को उछालने की संख्या	चित न जाने की संख्या	एक चित आने की संख्या	दो चित आने की संख्या
20			

अब सभी समूह एक संचयी सारणी बनाएँगे ।

वर्ग(s)	दो सिक्कों के उछालने की संख्या	चित न आने की संभावना	एक चित आने की संभावना	दो चित आने की संभावनाएँ
1st				
1st + 2nd				
1st + 2nd + 3rd				
1st + 2nd + 3rd + 4th				
....				

अब हम चित न आने की संभावना और दो सिक्कों की उछालने की संख्या का अनुपात ज्ञात करेंगे । उसी प्रकार एक चित और दो चित आने की संभावनाओं का भी अनुपात ज्ञात करेंगे ।

नीचे दिए गए तालिका की पूर्ति कीजिए ।

वर्ग(s)	$\dfrac{\text{चित न आने की संख्या}}{\text{कुल उछलों की संख्या}}$	$\dfrac{\text{एक चित आने की संख्या}}{\text{कुल उछालों की संख्या}}$	$\dfrac{\text{दो चित आने की संख्या}}{\text{कुल उछालों की संख्या}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
समूह 1 st			
समूह 1 + 2 nd			
समूह 1 + 2 + 3 rd			
समूह 1 + 2 + 3 + 4 th			
....			

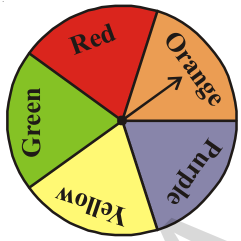
जैसा ही उछालों की संख्या बढ़ती जाएगी, स्तंभ (2), (3) और (4) के मान क्रमशः 0.25, 0.5 और 0.25 के निकट होते जाएंगे ।

उदाहरण-3: एक चक्र को 1000 बार घुमायाँतो निम्नलिखित बारबारिताएँ प्राप्त होती है ।

परिणाम	लाल	नारंगी	बैंगनी	पीला	हरा
बारबारिताएँ	185	195	210	206	204

ज्ञात कीजिए। (a) प्रत्येक घटना में संभव परिणामों को सूची बद्ध कीजिए । (b) प्रत्येक घटना की प्रायिकता अभिलिखित कीजिए ।(c) सारणी से प्रत्येक परिणाम और कुल चक्र को घूमाने कि संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल :



(a) संभव परिणाम पाँच है। वे हैं लाल, नारंगी, बैंगनी, पीला और हरा है। चक्र में ये सभी पाँच रंग समान क्षेत्र को घेरेंगे। वे सभी समप्रायिक है।

(b) प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

$$P(\text{लाल}) = \frac{\text{लाल आने की परिणामों की संभावनाएँ}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{1}{5} = 0.2.$$

इसी प्रकार

P(नारंगी), P(बैंगनी), P(पीला) और P(हरा) = $\frac{1}{5}$ या 0.2 है।

(c) प्रयोग के परिणामों को बारंबारिता तालिका में लिखा जाएगा।

$$P(\text{लाल}) = \text{लाल का अनुपात} = \frac{\text{प्रयोग में लाल आने के परिणामों की संख्या}}{\text{चक्र को घुमाने की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{185}{1000} = 0.185$$

इसी प्रकार, नारंगी, बैंगनी, पीला और हरे रंगों के संबन्धित अनुपात क्रमशः 0.195, 0.210, 0.206 और 0. 204 हो सकते हैं।

हम देखेंगे कि (b) में ज्ञात किया गया प्रायिकता का प्रत्येक अनुपात लगभग समान होगा।[अर्थात् प्रयोग को करने से पहले]

उदाहरण-4. नीचे दिए गए तालिका में एक सिनेमा हॉल के प्रेक्षकों की आयु दी गयी है। प्रत्येक व्यक्ति को एक क्रम संख्या दी गयी है और एक व्यक्ति को क्रम संख्या के आधार पर चुना गया है। अब आप प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(उमर) आयु	पुरुष	स्त्री
वर्ष से 2	3	5
3 - 10 वर्ष	24	35
11 - 16 वर्ष	42	53
17 - 40 वर्ष	121	97
41- 60 वर्ष	51	43
60 वर्ष से ऊपर	18	13

कुल प्रेक्षकों की संख्या : 505

नीचे दिए गए प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल :

a) 10 या इससे कम आयु वाले प्रेक्षकों के प्रायिकता

10 या इस से कम आयु वाले प्रेक्षकों की संख्या $= 24 + 35 + 5 + 3 = 67$

कुल प्रेक्षकों की संख्या $= 505$

P(प्रेक्षकों की आयु ≤ 10) $= \dfrac{67}{505}$

b) 16 साल या उस से कम आयु वाले स्त्री प्रेक्षकों की प्रायिकता

16 साल या उस से कम आयु वाले स्त्रीयों की संख्या $= 53 + 35 + 5 = 93$

P(स्त्री प्रेक्षकों की आयु $\leq$ 16 years) = 93/505

c) 17 वर्ष या उस से अधिक आयु वाले पुरुषों की प्रायिकता

$= 121 + 51 + 18 = 190$

P(पुरुष की आयु $\geq$ 17 वर्ष) $= \dfrac{190}{505} = \dfrac{38}{101}$

d) 40 वर्ष से अधिक आयु वाले प्रेक्षकों की प्रायिकता

$= 51+43+18+ 13 = 125$

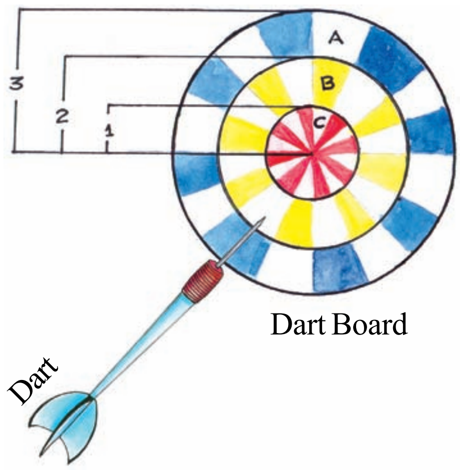
P(प्रेक्षकों की आयु > 40 वर्ष) $= \dfrac{125}{505} = \dfrac{25}{101}$

e) सिनेमा देखने वाले प्रेक्षकों में पुरुष न होने वाली प्रायिकता

$= 5 + 35 + 53 + 97 + 43 + 13 = 246$

P(सिनेमा देखने वाला प्रेक्षक जो पुरुष नहीं है।)$= \dfrac{246}{505}$

उदाहरण-5 : मान लीजिए कि एक बाण निशानेवाजी वाले बोर्ड पर निशाना लगाते हुए फेंका जाता है। बोर्ड में तीन एक केंद्रीय वृत्त हैं। जिनकी त्रिया क्रमशः 3 cm, 2 cm और 1 cm है। उन तीनों वृत्तों में बाण लगने की संभावना/प्रायिकता समान है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया हैं -



Dart Board

बाण के A क्षेत्र में लगने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (बाहरी वलय)

हल: यहाँ A के क्षेत्र में बाण लगाने की घटना है।

3 cm त्रिव्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi(3)^2$

वृत्ताकार क्षेत्र A का क्षेत्रफल (अर्थात वलय A) = $\pi(3)^2 - \pi(2)^2$

बाण का बोर्ड के क्षेत्रA में लगने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{\text{वृत्ताकार क्षेत्र A का क्षेत्रफल}}{\text{कुल क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi} = \frac{5}{9}$$

याद रखिए

वृत्त के क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वलय के क्षेत्र फल $= \pi R^2 - \pi r^2$

प्रयत्न कीजिए

उदाहरण - 5 में दिए गए चित्र की सहायता से कीजिए ।

1. बाण का क्षेत्र B में लगने की प्रायिकता को ज्ञात कीजिए । (अर्थात् : वलय B).
2. बाण का क्षेत्र C में लगने की प्रायिकता प्रतिशतन ज्ञात कीजिए । (अर्थातः वलय C).

14.3 वास्तविक जीवन में प्रायिकता के उपयोग ।

- मौसम विभाग बीते हुए अनेक वर्षों के आँकडों की प्रवृत्तियों को देखकर मौसम के बारे में भविष्यवाणी (प्रगुप्तियाँ) करता है ।
- बीमा कंपनियाँ बीमा प्रीमियम तय करने के लिए दुर्घटना होने या न होने की प्रायिकता परिकलित करते हैं ।
- चुनाव के बाद एक्जिट पोल किया जाता हैं । इनमें संपूर्ण क्षेत्र में बंटित केन्द्रों में से यदृच्छ रूप से कुछ केन्द्र चुनकर मतदान करके आने वाले व्यक्तियों से यह पूछा जाता है कि उन्होंने किस मत दिया हैं । इससे प्रत्येक प्रत्याशी के जितने की संभावना का अनुमान लगाया जाता है तथा इसी आधार पर प्रागुप्तियाँ (भविष्यवाणियाँ) की जाती हैं ।

अभ्यास - 14.1

1. एक पासे के छः सप्तह पर 1 से 6 तक अंक लिखे हुए है । इस को फेंक कर अपरी सतह के अंक को लिखिए। जब इस को ऐच्छिक अभिप्रयोग माना जाए तो ।

   a) संभव परिणाम क्या है?

   b) क्या वे सम संभावित हैं? क्यों?

   c) अपरी सतह पर संयुक्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

2. एक सिक्के को 100 बार उछाल कर प्रेक्षणों को लिखिए ।

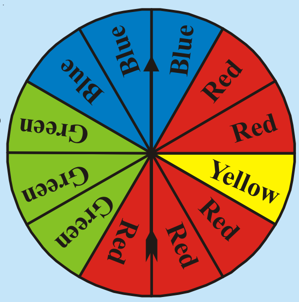
   चितों की संख्या :45 times   पटों की संख्या :55

   a) प्रत्येक परिणाम कि प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

   b) प्रत्येक सभी परिणामों के प्रायिकताओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

3. एक चक्र में चार भिन्न रंग हैं जैसा चित्र में दर्शाया गया है ।

   जब हम एक बार घुमाएँ तो, ज्ञात कीजिए कि ।



   a) (सूचक) किस रंग (के पर पास) रूकने की ज्यादा संभावना हैं?

   b) (सूचक) किस रंग पर रूकने की कम संभावना हैं?

   c) (सूचक) किस रंग के पर रूकने की सम संभावना हैं?

   d) (सूचक) सफ़ेद रंग पर रूकने की सम संभावना हैं?

   e) किस रंग पर (सूचक) निश्चित रूप से रूकेगा?

4. एक थैली में पाँच हरी गेंदें, तीन नीली गेंदें, दो लाल गेंदें और दो पीली गेंदें हैं। इसमें से यादृच्छिक रूप से एक गेंद निकाली जाय तो ।

   a) क्या चार भिन्न रंगों के परिणाम समप्रायिक (सम संभावित) हैं? विवरण दीजिए।

   b) प्रत्येक रंग के गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

   अर्थात् P(हरा), P(नीला), P(लाल) और P(पीला)

5. अंग्रेजी अक्षर माला से एक अक्षर चुन लिया गया हैं। निम्न लिखित अक्षर होने का प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

   a) स्वर   b) P के बाद आने वाला एक अक्षर

   c) एक स्वर या एक व्यंजन   d) स्वर न होने की प्रायिकता

6. ग्यारह गेहुँ के आटे की थैलियों पर 5 कि.ग्रा. अंकित किया गया है। वास्तव में इनके यही भार इस प्रकार हैं । (कि.ग्रा.में.)

 4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

 इस में से एक थैले को (ऐच्छिक रूप से) चुन लिया जाय तो वह 5 कि.ग्रा. से अधिक भार वाला थैली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

7. एक बीमा कंपनी ने आयु और दुर्घटनाओं के बीच के संबंध को ज्ञात करने केलिए एक विशेष नगर के 2000 ड्राइवरों का ऐच्छिक चयन किया । (किसी ड्राइवर को कोई विशेष भरपाई दिए बिना) । प्राप्त किए गए आंकड़े नीचे सारणी में दिए गए हैं :

ड्राइवरों की आयु (वर्षों में)	**एक वर्ष में घटित दुर्घटनाएँ**				
	0	**1**	**2**	**3**	**उसे अधिक**
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
50 से अधिक	360	45	35	15	9

 नगर से यदृच्छ या चुने गए एक ड्राइवर के लिए निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकताएँ ज्ञात कीकजिए:

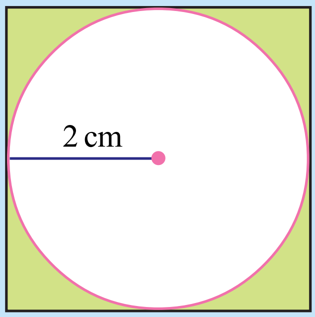
 (i) 18-29 वर्ष की आयु का जिसकी एक वर्ष में 3 दृघटनाएँ घटित हुई हो।

 (ii) 30-50 वर्ष की आयु का जिसकी एक वर्ष में एक या एक से अधिक दुर्घटनाएँ घटीत हुई हों ।

 (iii) जिसके साथ एक वर्ष में कोई दुर्घटना नहीं घटीत हुई हो।

8. एक बाण को ऐच्छिक फेंका तो वर्गाकार बोर्ड के छायांकित क्षेत्र में लगने की प्रायिकता क्या होगी?

 ($\pi = \frac{22}{7}$ लेकर % में व्यक्त कीजिए)



हमने क्या सीखा?

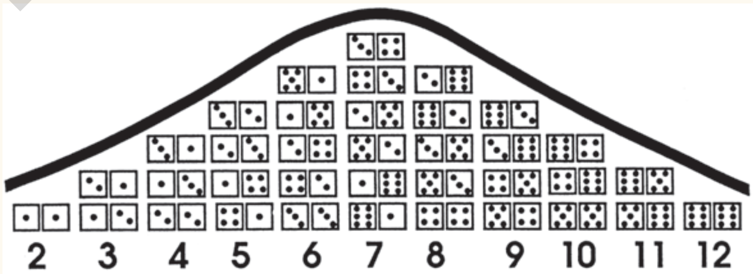
- वास्तविक जीवन में किसी विषय के संबंधित संयोग और निर्णय बताने समय पर अधिक संभावना, कोई मौका नहीं, सम प्रायिक आदि शब्दों का प्रयोग किया जाता हैं ।
- कुछ ऐसे प्रयोग होते हैं जिनमें परिणामों के आने की संभावनाएँ बराबर होती हैं। इस तरह के परिणामों को सम संभावित (सम प्रायिक) परिणाम कहते हैं।
- एक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम या परिणामों के संग्रह से एक घटना बनती हैं।
- कुछ ऐच्छिक प्रयोगों में सभी परिणाम सम संभावित होते हैं।
- अभिप्रयोगें की संख्या बढ़ाते जाएँगे तो सम प्रायिक परिणामों की प्रायिकता परस्पर निकट होती जाएगें।
- घटना A की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटी है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

- एक निश्चित घटना की प्रायिकता 1होती हैं ।
- एक असंभव घटना के प्रायिकता 0 है ।
- प्रत्येक घटना की प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के बीच होती हैं। (0 और 1 को मिलाकर).

क्या आप जानते हैं?

जब दो पासे को एक ही साथ उछाला जाय तो संभव 36 परिणामों को नीचे के चित्र में दर्शाया गया हैं। भिन्न-भिन्न संभव संख्याओं के बारंबरिताएँ देखने में बहुत ही आकर्षित होंगी।(2 से 12 तक) इसे गास्सियन वक्र चित्र द्वारा दर्शाते हैं।



यह गास्सियन वक्र को स्पष्ट करते हैं जो 6वीं शताब्दी के प्रसिद्ध गणितज्ञ के नाम पर हैं । - कॉर्ल फ्रेडरिच गॉस (*Carl Friedrich Gauss*)

15

गणित में उपपत्तियाँ
(PROOFS IN MATHEMATICS)

15.1 प्रस्तावना :

हम अपने दैनिक जीवन में कई कथनो का सामना करते है । प्रत्येक कथन की सच्चाई को जानना चाहते है। कोई कथन सत्य कोई असत्य और कोई बिना अर्थ वाले होते है। किसी कथन के बारे में हम कोई सही जाँच नही कर सकते है। यदि हमें खर्ज लेना है तो बैंक वाले खर्ज की भरपाई के लिए सबूत के रूप में हमसे कुछ बाँड लिखवाते है जो एक भी कथन है। उसके बिना आपकी बात का कोई विश्वास नहीं करता है यदि हम ध्यान पूर्वक सोचे तो अपने दैनिक जीवन में कोई कथन सत्य या असत्य हो सकता है। हम बिना किसी जाँच के किसी भी कथन को सत्य-गठित नहीं कर सकते हैं।

1. सूरज पूर्व से निकलता है ।
2. $3 + 2 = 5$
3. न्यूयार्क USA की राजधानी है ।
4. $4 > 8$
5. आपके कितने बच्चे है ?
6. गोआ की फुटबाल टीम बंगाल से अच्छी है?
7. आयत की चार सममिति रेखाएँ है।
8. $x + 2 = 7$
9. कृपया भीतर आइए ।
10. 6 भुजाओ वाले सिक्के को उछलने पर
11. आप कैसे हो ?
12. सूर्य स्थिर नही है यह तीव्रगति से सदा घूमता रहता है।
13. $x < y$
14. आप कहा रहते हो ?

आप जानते है, उपरोक्त कथनों में से कुछ प्रश्नों के उत्तर असत्य है। उदाः $4>8$ उसी प्रकार हम जानते है कि New York USA. की राजधानी नही है । कुछ प्रश्नो का उत्तर हम अपनी वर्तमान जानकारी से भी बता सकते है ''सूरज पूरब से निकलता है।''

सूरज स्थिर नही है ....

कुछ प्रश्नो के उत्तर सही है। कुछ संदर्भों में कथन सत्य होते है और वही कुछ संदर्भों में असत्य सिद्ध होते हैं। अर्थात् उदा : $x + 2 = 7$ सही है $x = 5$, $x < y$ सही है x और y के लिए जहाँ $x < y$ है । अर्थात् x, y से छोटा होना चाहिए।

कुछ दूसरे वाक्यो को देखिए जो सत्य या असत्य होगे। ये कथन है। इन कथनो को कुछ अवस्थाओ में सत्य या असत्य कथन कहेगे । किसी भी विधि से उस कथन को सत्य या असत्य सिद्ध किया जा सकता है।

सोचिए:

1. इस नोटिस पर ध्यान मत दीजिए ।
2. मै बनाती हूँ वह असत्य कथन है।
3. इस वाक्य में कुछ शब्द है ।
4. शायद चन्द्रमा पर पानी प्राप्त होगा ?

क्या तुम कह सकते हो कि कहे गए वाक्य सत्य या असत्य है। इसे जाँच करने की क्या कोई विधी है।

पहले वाक्य को देखिए, यदि आप कोई नोटिस पर ध्यान नही देते हो, क्यों कि वह ऐसा करने के लिए कहते है। अगर आप इस पर ध्यान देते हो तो आप कुछ तो सोचेंगे। आप उसके सत्य या असत्यता पर भी ध्यान नही देंगे। दूसरा और तीसरा वाक्य कुछ अपने ही बारे में कहते है। चौथा वाक्य सत्य या असत्य दोनो भी हो सकते हैं ।

अतः ऐसे वाक्य जो अपने ही बारे में बताते हो या जो वाक्य संभावना को दर्शाते है तो उन्हे कथन नहीं कहेंगे ।

निम्न करीए :

5 वाक्य बनाइए जाँच कर बताइए की वे कथन है या नही कारण भी बताइए ।

15.2 गणित के कथन (Mathematical Statements)

हम अनन्त वाक्य लिख सकते है। सभी वाक्य सत्य या असत्य नही हो सकते उदाः कृपया भीतर आइए आप कहाँ रहते हो? ऐसे वाक्य बहुत बड़ी संख्या में हो सकते है ।

सभी वाक्य कथन नही होगे । ऐसे वाक्य जिसे सत्य या असत्य परन्तु दोनो नही वही एक कथन होगा। गणितिय कथन के लिए यह भी सत्य है। एक गणित का कथन द्वीअर्थ (ambiguous) नहीं होगा ।

निम्न वाक्य देखिए :

1. 3 एक रूढ संख्या है।
2. दो विषम संख्याओ का गुणा सम हतो है।
3. वास्तविक संख्या x; $4x + x = 5x$
4. पृथ्वी पर एक चाँद है ।
5. रामू अच्छा ड्राइवर (चालक) है ।
6. भास्करा ने ''लीलावती''पुस्तक लिखी है।
7. पूरे सम संख्याएँ सयुक्त है ।
8. समचर्तुभुज को वर्ग भी कह सकते है ।
9. $x > 7$.
10. 4 और 5 संबंधित रूढ संख्याएँ है ।

11. चाँदी की मछली चांदी से बनी है ।   12. मनुष्य पृथ्वी पर राज करते है ।

13. कोई वास्तविक संख्या x, $2x > x$.   14. क्यूबा की राजधानी हवाना है ।

इनमें से कौनसे गणितिय कथन है और कौन से गणितिय कथन नहीं है ?

15.3 कथनो की जाँच :

कुछ वाक्यो पर चर्चा करेगो :

उदाहरण -1 : रूढ़ संख्याओ की परिभाषा अनुसार (1) सत्य है। उपरोक्त वाक्यों में ऐसे कौनसे वाक्य है जो गणितिय पद्धति से सिद्ध किये जा सकते है ? (सिद्ध करने के प्रयास कीजिए)

उदाहरण -2. दो विषम संख्याओ का गुणांक सम संख्या है। 3 और 5 विषम संख्याए है उनका गुणांक 15 जो सम संख्या नहीं है ।

अतः यह एक ऐसा कथन है जो असत्य है। उदाहरण एक के द्वारा हम दर्शा सकते है यहाँ हम कथन के प्रतिकूल उदाहरण देकर उनकी जाँच कर सकते हैं। ऐसे उदाहरण जो कथन के प्रतिकूल होते है उन्हें प्रतिकूल उदाहरण कहते हैं।

प्रयत्न कीजिए :

कौन से कथन प्रतिकूल उदाहरण देकर बताए जाएगे ।

उदाहरण-3.

ऊपर के वाक्यों में कुछ कथन जैसे ''मनुष्य पृथ्वी पर राज करता है'' या ''रामू एक अच्छा ड्राइवर है।''

यह कुछ असस्प्ट कथन है जैसे पृथ्वी पर राज करना कुछ विशेषता नही बताई गई है। उसी प्रकार अच्छे ड्राइवर की क्या परिभाषा है?

इसलिए हम ऐसे कथनों को गणितीय कथन कहते हैं जो सभी संदर्भो में एक ही अर्थ देता है।

उदाहरण-4. कुछ और कथनों को देखिए जैसे

पृथ्वी पर एक चाँद है ।

भास्कर ने ''लीलावती'' पुस्तक लिखी है।

ये कथन है या नहीं कैसे सिद्ध करोगे ?

इन वाक्यों में संदिग्धता नहीं है इसे सिद्ध करने की आवश्यकता नहीं होगी ।

ये अस्पष्ट कथन नहीं है फिर भी उनकी जाँच आवश्यक है। उन्हें कुछ ठोस निरीक्षणों या सबूतों की आवश्यकता होगी। इसके अलावा ये पूर्व सिद्ध कथन नहीं है। पहले कथन को सौर परिवार तथा पृथ्वी के निरीक्षण की आवश्यकता होगी। दूसरे कथन के लिए दस्तावेज या पुस्तकीय संदर्भो की आवश्यकता होगी।

गणितीय कथनो का अलग स्वभाव होता है। उसे हमे कुछ कारणों की वजह से सिद्ध नही कर सकते उन्हे प्रतिकूल उदाहरणों से समझा सकते है।

प्रतिकूल कथन बताना है। कोई वास्तविक संख्या $2x > x$, $x = -1$ या $-\frac{1}{2}$ .... कथन को सिद्ध न करके प्रतिकूल उदाहरण दे । $2x > x$ सत्य है x N होगा ।

उदाहरण-5.

निम्न कथनो को सही कारणो से सत्य कथन बनाइए ।

i. प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए $x, 3x > x$.

ii. प्रत्येक वास्तविक संख्या $x, x^2 \geq x$.

iii. प्रत्येक संख्या को दो विभाजित करने पर संख्या की आधी संख्या आएगी ।

iv. वृत्त के किसी बिन्दु पर चापकर्ण से बनने वाला कोण 90° है ।

v. किसी चर्तुभुज की चारो भुजाएँ समान हो तो उसे वर्ग कहते है ।

हल:

i. यदि $x > 0$, तो $3x > x$.

ii. यदि $x \leq 0$ या $x \geq 1$, तो $x^2 \geq x$.

iii. संख्या जो शून्य न हो उसे 2 से विभाजित करने पर, संख्या आधी हो जाती है ।

iv. वृत्त के व्यास से वृत्त पर के बिन्दु पर बनने वाला कोण 90° होता है ।

v. यदि चतुर्भुज की चारों भुजाएँ और सभी अतः कोण समान हो तो यह वर्ग होगा ।

अभ्यास 15.1

1. निम्न वाक्य सत्य या असत्य या अस्पष्ट है उत्तर की जाँच कीजिए ।

   i. एक महीने में 27 दिन होते है।   ii. मकर संक्रांति शुक्रवार के दिन होती है।

   iii. हैदराबाद का तापमान 2°C है।   iv. पृथ्वी एक ऐसा ग्रह है जहां जीवन है ।

   v. कुत्ते उड़ सकते है ।   vi. फरवरी में 28 दिन होते है ।

2. निम्न कथन सत्य या असत्य बताइए कारण लिखिए ।

   i. चर्तुभुज के अतः कोणो का योग 350° होता है ।

   ii. प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए $x, x^2 \geq 0$

   iii. एक समचर्तुभुज समानान्तर चतुर्भुज होगा   iv. दो सम संख्याओ का योग सम संख्या होगी

   v. वर्गीय संख्याएँ दो विषम संख्याओ के योग के रूप में लिखी जा सकती है ।

3. निम्न कथनो को सत्य कथन बनाने के लिए नए कारण बताओ ।

   i. सभी संख्याएँ रूढ़ संख्याओं को रुढी गुणक खण्ड के रुप में दर्शाया जा सकता है।

   ii. वास्तविक संख्या को दुगना
   हो सकती है ।   करने पर हमेशा सम संख्या होगी ।

   iii. कोई $x, 3x + 1 > 4$.   iv. कोई $x, x^3 \geq 0$.

   v. प्रत्येक त्रिभुज में माध्यिका कोण का समद्विभाजक होता है ।

4. प्रतिकूल उदाहरण देकर सिद्ध करो $x^2 > y^2$ सभी $x > y$ के लिए।

15.4 गणित में तर्क-वितर्क (Reasoning in Mathematics)

मनुष्य स्वभाव से ही जिज्ञासु है। यह जिज्ञासा हमें संसार से भिड़ने की शक्ति देती है। क्या होगा यदि हम उसे आगे ढेकले?इसमें डाले ? कई कारण कई सोचे तो भी हम नही बता सकते, सभी समय हम कह सकते है -

''क्या होगा अगर हम अलग-अलग हाव भाव का उपयोग करें?

इन प्रयोगों के आधार पर हमने भौतिक संसार के कुछ स्थिर चित्रों को चित्रित किया है। अंततः सभी स्थितियों में हम इसका प्रतिस्थापन करते है?

'क्या होगा यदि ऐसा घटता है तो' इस भावना तक हम पहुँचते है

पूर्व समझ का शुद्धिकरण और नये विचारों के उद्‌भव पर प्रयोग चलते रहते है। इस क्रिडात्मक परिभाषाओं का कल्पनात्मक तथ्यों को सिद्ध करने के लिए उपयोग किया गया।

- कुछ निरिक्षणों से दत्तों को एकत्रित कीजिए।
- आपके निरिक्षण को समझाने वाला निष्कर्ष निकालिए।
- आपकी कल्पना को कुछ और उदाहरणों से जाँच कीजिए।

तब हमें प्राप्त होता हैः

- एक स्वयंतथ्य वह कथन या विचार है जो निरिक्षणों की श्रृंखला को समझाता है।

कभी-कभी किये गये निरिक्षण, कल्पना के शुद्धिकरण या निषेध की आवश्यकता पड़ती है। ऐसा तभी होता है जब निरिक्षण की केवल एक ही प्रतिकुलता पायी जाती है। साधारणतया हम गणित में कल्पना के स्थान पर अनुमान शब्द का प्रयोग करते है। इन दोनों पदों की समानता तथा भिन्नता को आप अगली कक्षाओं में पढेंगे।

15.4.1 कल्पनाओं के जाँच में निगमन कारणों का उपयोग :-

हमेशा उपपत्ति के निकट वाले विचारों में हमेशा असामंजस्य रहता है। जो गणितीय प्रक्रिया है जबकि परिकल्पना की जाँच एक वैज्ञानिक प्रक्रिया है। इनके बीच बहुत ही साधारण अंतर है।

- गणित निगमन कारणों पर आधारित होता हैः उपपत्ति एक तर्क संगत निगमन है जो दिये गए तथ्यों पर बनता है।
- विज्ञान आगमन कारणों पर आधारित होता हैः परिकल्पनाओं को या मजबूती प्रदान करते है या फिर उनका निषेध किया जाता है जो प्रयोगों से एकत्रित प्रमाणों पर आधारित होता है।

विज्ञान में अच्छा सिद्ध होने के लिए आपकों निगमन कारणों पर आधारित होना पड़ता है।

जासूस जैसे शेरलॉक होम तथा हरक्यूल पायराट इतने निपुण थे कि, वे घटना स्थान से प्रमाण एकत्रित कर उनसे तर्क संगत निष्कर्ष निकालते थे। उदाहरणार्थ M व्यक्ति ने कोई जुर्म किया है। वे इस प्रमाण को इस प्रकार तैयार करते है कि कल्पना को प्रमाणित करें जो कि अनुमानित कारणों से ऊपर होगा। यहाँ का मुख्य शब्द कारणवश है।

15.4.2 निगमन कारण (Deductive Reasoning)

स्पष्ट कथनों को तर्क संगत सत्य प्रमाणित करने की विधि को निगमन विधि कहते है। निगमन विधि को समझने के लिए इस पहली को हल करेंगे।

आपको चार कार्ड दिए गए है। प्रत्येक कार्ड पर एक तरफ संख्या तथा दूसरी तरफ अंग्रेजी वर्ण छपा होगा।

A	V	8	5

यदि आपको बताया गया कि ये कार्ड इन नियमों का पालन करते है।

“यदि कार्ड के एक ओर विषम संख्या हो तो दूसरी ओर स्वर होगा।”

इस नियम की सत्यता की जाँच करने के लिए आप कौन-सा कार्ड पलटायेंगे।

सभावतः आप एक-एक कार्ड को पलटाकर जाँच कर सकते है। क्या आप कम कार्डों के साथ इसकी व्यवस्था कर सकते है?

ध्यान दिजिए कि कथन ‘‘काडई की एक ओर विषम संख्या और दूसरी ओर स्वर होना चाहिए। इसका अर्थ या नहीं होता है कि एक ओर स्वर वाले कार्ड पर दूसरी ओर विषम संख्या होनी चाहिए। वह हो भी सकता है नहीं भी हो सकता है? इस नियम का यह भी अर्थ नहीं हो सकता है कि एख ओर सम संख्या हो तो दूसरी ओर व्यंजन होने चाहिए। यह हो भी सकता है नहीं भी हो सकता।

क्या हम ‘A’ को पलटाएंगे नहीं। उसके पिछे सम या विषम संख्या होने पर भी नियम लागू होता है।

8 के बारे में क्या कहेंगे? उसे फिर से पलटाने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि उसके पिछे स्वर या व्यंजन होने पर भी नियम लागू होता है।

लेकिन आपको V तथा 5 को पलटाना पड़ेगा, यदि V के पिछे विषम संख्या हो तो नियम भंग होता है। उसी प्रकार यदि 5 के पिछे व्यंजन हो तो भी नियम भंग होता है।

इस पहले को सुलझाने के लिए उपयोगी विधि को निगमन कारण कहते है। इसे निगमन इसलिए कहते है क्योंकि हम पहले स्थापित कथन पर तर्क संगति से पहुँचते है। उपरोक्त उदाहरण में हमने देखा कि हमें सिर्फ V और 5 को ही पलटना पड़ेगा।

निगमन कारण किसी कथन को सत्य सिद्ध करने के लिए भी उपयोगी सिद्ध होती है। उदाहरणार्थ एक बार हमने सिद्ध किया कि दो सम संख्याओं का गुणनफल सम संख्या ही होता है तो 56702×19992 का गुणनफल सम संख्या इस निष्कर्ष पर तुरंत पहुँच सकते है। क्योंकि 56702 तथा 19992 सम संख्यायें है।

कुछ और उदाहरणों को देखिए।

i. यदि कोई संख्या '0'पर समाप्त होती है तो वह 5 से विभाजित होती हैं 30, 0 पर समाप्त होता है। इस कथन द्वारा हम यह निष्कर्ष निकालते है कि 5 से 30 विभाजित होता है।

ii. कुछ गायक, कवि होते है, सभी संगीतकार कवि होते हैं।

यहाँ निगमन दो कथनों पर आधारित है सभी संगीतकार कवि होते है (गलत होगा) क्योंकि हम इसे प्रमाण भूत रूप से सिद्ध नहीं कर सकते हैं यहाँ तीन संभावनाएँ है। (i) सभी संगीतकार कवि हो सकते है। (ii) कुछ कवि हो सकते हैं (iii) कोई भी कवि नहीं हो सकता।

आप इस निष्कर्ष पर पहुँचेगे कि ''यदि तो'' वाले प्रतिबन्ध कथन निगमन कारणों में आते है। गणित में हम इस तर्क को बार-बार उपयोग में लाते है। जैसे रैखिक युग्म कोणों का योग 180° होता हैं तो ही त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होगा। उसी प्रकार जब हम दशमलव संख्या का उपयोग करते हैं स्ख्या 5 लिखते हैं उसी को द्विपद विधि से 101 लिखा जाता है।

दुर्भाग्यवश हमेशा हम अपने जीवन में सहीं कारणों का उपयोग नहीं करते हैं गलत कारणों पर आधारित निष्कर्ष निकालते हैं। उदाहरणार्थ यदि आपका मित्र आपसे बात नहीं करता हैं तो आप निष्कर्ष निकालने है कि वह आप पर क्रोधित है या वह हमसे किसी कारणवश नाराज है । यह सही होगा ''यदि वह गुस्से में हो तो वह मुझसे बात नही करती है'' या यह भी सही हो सकता है ''यदि वह अपने कार्य में व्यस्त है तो बात नही करती है'' इस प्रकार दिन प्रतिदिन के कार्यो में हम किसी भी निष्कर्ष पर नही आ सकते यदि वह गलत कारणो पर आधारित है ।

अभ्यास - 15.2

1. नीचे दिये गये प्रश्नों को निगमन पद्धति से हल कीजिए ।

   i. मनुष्य का अन्त निश्चित है। जीवन एक मनुष्य है। इन दो कथनो के आधार पर आप ''जीवन'' के लिए किस निर्णय पर पहुँचते है ?

   ii. सभी तेलुगु भाषी हिन्दुस्थानी है । X एक भारतीय है। क्या तुम कह सकते हो कि X एक तेलुगु भाषी है ।

   iii. मंगलग्रह वासियों की जीभ लाल है गुलाग एक मंगलग्रह वासी है। इस दो कथनो के आधार पर हम गुलाग के बारे में क्या कह सकते है ?

   iv. राजू नीचे दिए गए कार्टून में क्या अपने बारे में गलत सोच रहा है ।

2. फिर से आपको 4 कार्ड दिए जाय हर पत्ते पर एक ओर छपाई है दूसरी ओर शब्द। ।

यदि पत्ते पर एक ओर स्थिरांक है तो दूसरी ओर एक विषम संख्या होगी ।

B	3	U	8

3. एक पहेली के बारे में सोचो आपको एक वर्ग से चुना गया नम्बर पहचानना है ।
निचे दिए गए संकेतों में चार सही है परन्तु कोई भी सहायक नही है।
संख्या को ज्ञात करने के लिए चार संकेतो की आवश्यकता है।
यहाँ आठ संकेत दिए गए है उनमें से

a. 9 से बड़ी संख्या।

b. संख्या जो कि 10 गुणांक नही है ।

c. संख्या जो 7 का गुणांक है ।

d. संख्या विषम है ।

e. यह 11 के गुणांक नही है ।

f. यह 200 से छोटी है।

g. इसकी इकाई संख्या दहाई से बड़ी होगी ।

h. दहाई संख्या विषम है ।

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

संख्या क्या है ?
चार उपयोगी और चार अनउपयोगी संकेतो को बताइए ।
पहले संकेत का उपयोग करो और उसे काट दो जो उपयोगी नही है।
पहले संकेत के अनुसार 1 से 9 तक की संख्याएँ काट दो ।
पहेली पूरा होने के पश्चात देखिए की, कौनसे संकेत आवश्यक थें और कौन से नही ।

15.5 प्रमेय, परिकल्पनाएँ एवं स्वयंतथ्य (Theorems, Conjectures and Axioms)

अब तक हमने कथन के बारे में जानकारी प्राप्त कि है । अब हम तीन प्रकार के कथनो के अन्तर को जानेंगे गणित प्रमुखतः प्रमेय, परिकल्पना और स्वयं तथ्य पर आधारित है।

आपने अब तक कई प्रमेय जाने है। प्रमेय क्या है ? गणितीय कथन जिसको सिद्ध किया जा सकता है उसे प्रमेय कहते है। उदा : निम्न कथन एक प्रमेय है ।

प्रमेय -15.1 : त्रिभुज के अन्तः कोणो का योग 180° है ।

प्रमेय -15.2 : दो विषम संख्याओ का गुणांक एक विषम संख्या है ।

प्रमेय -15.3 : क्रमागत दो सम प्राकृतिक संख्याओ के गुणा 4 से विभाजित है ।

परिकल्पना एक ऐसा कथन है जो गणितीय प्रकार से सत्य है, यदि हम इसे सत्य प्रमाणित करते है तो यह एक प्रमेय बन जाता है। कुछ रचनात्मक कल्पना करके हम देखेगे ।

राजू ने देखा कि कुछ घन संख्याओ के बारे में जानने पर, "यदि तीन क्रमागत संख्याओ को गुणा करने पर, और मध्य संख्या को जोड़ने पर, उत्तर मध्य संख्या का घन आएगा । उदाः 3, 4, 5, तो $3 \times 4 \times 5 + 4 = 64$, यह एक धन है । क्या यह सभी संख्याओ के लिए सही है ? देखेगे ।

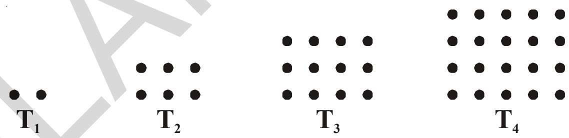
रफी ने 6, 7, 8 तीन संख्या ली $6 \times 7 \times 8 + 7 = 343$ यह भी एक पूर्ण धन है। n, $n+1$, $n+2$. साधारण संख्याएँ लेकर देखेगे ।

उदाहरण-6. निम्न ज्यामिति ऑरोस संख्याओ को एक क्रम से जमाइए ।

(a) आंगे की तीन पद लो ।

(b) 100^{th} पद ज्ञात करो ।

(c) n वा पद ज्ञात करो ।



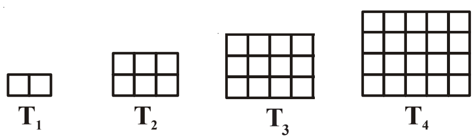
बिन्दुओ को आयताकार रूप में जमाया गया है ।

$T_1 = 2, T_2 = 6, T_3 = 12, T_4 = 20$ । T_5 का मूल्य क्या होगा ? T_6, T_n का मूल्य ?

निम्न रूप से हम T_n ज्ञात कर सकते है ।

हल :

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
2	6	12	20	?	.....
	+4	+6	+8	+10	



अतः $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

$T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$ ..... T_7 के लिए कोशिश क

$T_{100} = 100 \times 101 = 10,100$

$T_n = n \times (n+1) = n^2 + n$

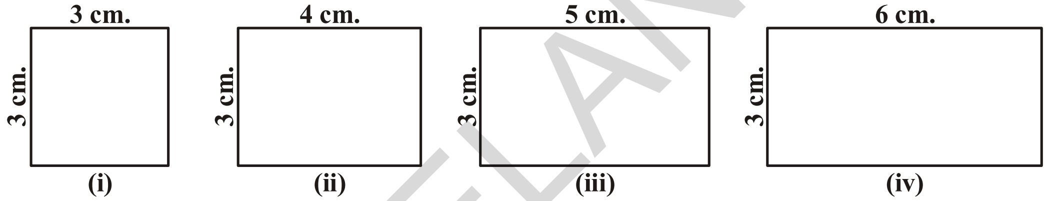
इस प्रकार के तर्क विभिन्न तथ्यों पर या दत्तों के समूहों पर आधारित होते है जो किस संख्या पद्धति या निष्कर्ष निर्माण को प्रधान करते है उन्हें आगमन पद्धति कहते है। आगमन पद्धित परिकल्पनाओं को बनाने में सहयक होती है।

गोल्ड बैच प्रसिद्ध गणितज्ञ, ने एक तरिका (pattern) बताया ?

$6 = 3 + 3$	$8 = 3 + 5$	$10 = 3 + 7$
$12 = 5 + 7$	$14 = 11 + 3$	$16 = 13 + 3 = 11 + 5$

गोल्ड बैच 1743 ने बताया कि प्रत्येक सम संख्या जो 4 से अधिक है दो रूढ़ संख्याओ के योग के रूप में लिखा जा सकता है । उसकी परिकल्पना सिद्ध नहीं करता है कि यह सत्य या असत्य है । यह उत्तर सत्य या असत्य सिद्ध होगा और काफी मशूहर होगा ।

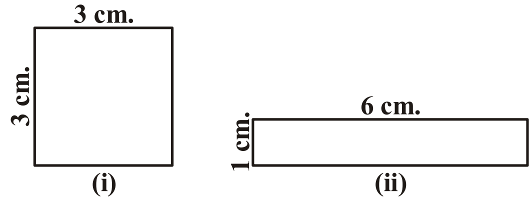
थोड़े प्रतिरूप देखकर हम लगत परिकल्पना पर पहुँच जाते है 8^{th} कक्षा में जानवी और कर्तिक क्षेत्रफल और परिमिती का अध्याय पढ़ रहे थे ....



	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
Perimeter :	**12 cm.**	**14 cm.**	**16 cm.**	**18 cm.**
Area :	**9 cm^2**	**12 cm^2**	**15 cm^2**	**18 cm^2**

इस निषकर्ष पर पहुँचते है कि यदि आयत की परिमिती बढ़ती है तो क्षेत्रफल भी बढ़ता है। आप क्या सोचते हो? क्या वे सही है ।

इस प्रतिरूप पर कार्य करने पर इन्द्र ने कुछ आयत उतारे, उसने इस प्रतिकल्पना को गलत बताया जो कि जानवी और कार्तिक ने बताए थे ।

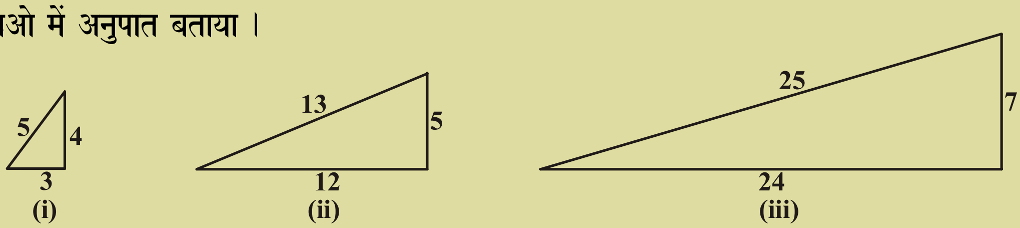


	(i)	(ii)
Perimeter :	**12 cm.**	**14 cm.**
Area :	**9 cm^2**	**6 cm^2**

अतः कुछ भी कहने से पहले सभी बातों का ध्यान में रखना अत्यन्त आवश्यक है ।

कोशिश कीजिए -

पायथागोरस की अधिक महत्ता से जलते हुए उसके भाई ने समकोण त्रिभुज के लिए अलग भुजाओ में अनुपात बताया ।



लिथोगोरस प्रमेय (Liethagoras Theorem) : क्रियी समकोण त्रिभुज में छोटी भुजा का वर्ग शेष भुजाओ के योग के बराबर होगा ।

ऊपरी तथ्य का सत्य या असत्य बताओ ।

हम इस बात को गणित के अनुसार सिद्ध करेगे ।

गणित में कुछ कथन सत्य कहे जाते है पर सिद्ध नही किए गए है यह स्वयं के द्वारा कहे गए है और बिना सिद्ध किए उन्हे सत्य कहा गया है । इन्हे हम स्वयं तथ्य कहते है । युक्लीड (Euclid) के अभिधारणा (postulates) और स्वयं तथ्य के बीच ज्यादा अन्तर नही है अतः उन्हे हम अभिधारणा (postulates) ही कहते है ।

उदा : युक्लीड का अभिधारणा 1 :

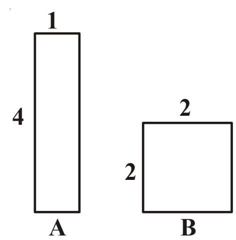
एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक एक सरल रेखा खिची जा सकती है ।

अभिधारणा 3 :

एक वृत्त किसी भी केन्द्र और और अर्धव्यास से खीचा जा सकता है ।

यह कथन पूरी तरह से सत्य है और युक्लीड उन्हे सत्य ही मानता है । क्योंकि प्रत्येक कथन को सिद्ध नही किया जा सकता है हमें कही न कही से आरम्भ करना है, अतः हम कोई सत्य कथन के आधार पर अपनी जानकारी बना पाते है ।

अतः तो हम सभी कथनो को सत्य क्यो नही मानते ?जबकि स्वयं वे अपनी सत्यता बताते है। इसके कई कारण है। कभी २ हमारी कल्पनाएँ गलत भी हो सकती है उसकी सत्यता के लिए सिद्ध करना आवश्यक है । उदाहरण के लिए हम सोचते है कि यदि किसी संख्या में दूसरी संख्या जोड़ी जाए तो वह दी गई संख्या से अधिक होगी। उदाः$5 + (-5) = 0 < 5$.



चित्र देखिए और बताइए किसका क्षेत्रफल अधिक है ?

चूँकि B बड़ा दिखाई देता है परन्तु दोनो का क्षेत्रफल समान हो ।

स्वयं तथ्य की सत्यता पर हमें ध्यान देना है। अपनी कल्पना पर हम स्वयं तथ्य का चुनाव करते है जो कि सत्य है। फिर बाद में हम पाते है कि यह स्वयं तथ्य असत्य है। निम्न बातो पर ध्यान दीजिए ।

i. स्वयं तथ्य (Axioms) जो युक्लीड के पाँच अभिधारणाओं (postulates) पर आधारित है हम 1000 प्रमेय बना सकते है ।

ii. यह निर्धारित कर लिजिए कि स्वयं तथ्य स्थिर है।

यदि हम एक स्वयं तथ्य के सहारे दूसरे स्वयंतथ्य को असत्य बताते है उदा- निम्न दो कथनो पर ध्यान दीजिए हम बतायेगे की वे अस्थिर है।

कथन-1 : कोई भी पूर्ण संख्या आगे की संख्या के बराबर नही होगी ।

कथन -2 : पूर्ण संख्या को शून्य से विभाजित करे तो पूर्ण संख्या ही होगी ।

(याद रखिए शून्य से भाग अपरिभाषित (not defined) नही हो सकता)

कथन-2 $\frac{1}{0} = a,\ a$ कोई पूर्ण संख्या है। अर्थात 1=0. परन्तु यह कथन -1को (असत्य) बताता है। अतः कोई पूर्ण संख्या आगे की संख्या के बराबर नही होगी ।

iii. असत्य कथन जल्दी था देर से हमें असमंज में डाल देता है। ‘‘यदि कथन का नकारात्मक और कथन सत्य हो तो ’ उदाः कथन १ कथन २.

कथन-1 - 2 $\neq$ 1.

$$x = y$$
$$x \times x = xy$$
$$x^2 = xy$$
$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$
$$(x+y)\ (x-y) = y\ (x - y)$$
$$x + y = y$$

परन्तु $x = y$

$$x + x = x$$
$$2x = x$$
$$2 = 1$$

दोनो कथन 2 $\neq$ 1 इसका नकारात्मक 2 = 1 सत्य है।

यह विरोधाभास है । कुछ असत्य तथ्य समस्यायें उत्पन्न करते है जैसे किसी पूर्ण संख्या को शून्य से विभाजित करने पर शून्य संख्या ही प्राप्त होती है ।

अतः कथन जो कि स्वयंतथ्य है उसे अधिक सोचना और समझना पड़ेगा।

जो आप स्वयं तथ्य पसन्द करते है उसे अधिक सोचना व समझना पड़ेगा । स्वयं तथ्य को चुनना कभी कभी नये खोज की ओर अग्रसर करा देता है ।

हम इस भाग का स्वयं तथ्य, प्रमेय एवं परिकल्पना के बीच अंतर को याद करते हुए अंत करेंगे। स्वयं तथ्य एक ऐसा गणितीय कथन है जिसे बिना सबूतों के ही सत्य माना जाता है ; परिकल्पना एक ऐसा गणितीय कथन है जिसके सत्य या असत्यता अभी सिद्ध करना बाकी है एवं प्रमेय एक ऐसा गणितीय कथन है जो तर्क के आधार पर सिद्ध किया जाता है।

अभ्यास 15.3

1. (i) किन्ही तीन क्रमागत विषम संख्याओ का गुणा ज्ञात कीजिए ।

   उदा- $1 \times 3 \times 5 = 15$, $3 \times 5 \times 7 = 105$, $5 \times 7 \times 9$ - .....

   (ii) किन्ही तीन क्रमागत सम संख्याओ का योग, $2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$,

   $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$ .... ।

   इन तरिका (pattern) को देखकर क्या आप कोई धारणा बना सकते है ?

2. Pascal's triangle पासकल का त्रिभुज

   Line-1 : $1 = 11^0$

   Line-2 : $11 = 11^1$

   Line-3 : $121 = 11^2$

   1
   1 1
   1 2 1
   1 3 3 1
   1 4 6 4 1

   क्या आप चौथी, पाँचवी रेखा के बारे में कोई धारणा बना सकते हो ।

3. निम्न तरिका (pattern) पर ध्यान दीजिए ।

   i) $28 = 2^2 \times 7^1$, खण्डो की संख्या $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$

   28 के खण्ड है इन 6 इन संख्याओ से पूर्ण विभाजित हैं । 1, 2, 4, 7, 14, 28

   ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ खण्डो की संख्या $(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

   30 के 8 खण्ड है इन खण्डो से यह पूर्ण विभाजित है । 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

   (**Hint :** प्रत्येक प्राकृतिक संख्या के गुणा जिसकी धात +1 है)

4. निम्न तरिका (pattern)को देखिए :

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

प्रत्यक के लिए एक परिकल्पना बनाइए।

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

आपकी मान्यता सही होगी या नही जाँच कीजिए।

5. इस पुस्तक के 5 स्वयं तथ्य बताओ ।

6. बहुपदी $p(x) = x^2 + x + 41$ का मूल्य ज्ञात करो । क्या आप देखते हे विभिन्न x मूल्यो के लिए $p(x)$ एक रूढ़ संख्या है । क्या x N है। $x = 41$ $p(x)$ का मूल्य ज्ञात करो ?

15.6 गणितिय उपपत्ति किसे कहते है ? (Mathematical Proof)

गणित में उपतत्ति जानने से पहले हम कथन को जाँचते है ।

उदाः ''दो विषम संख्याओ का गुणा विषम है'' उदा 15×2005 $15 \times 2005 = 30075$ (विषम संख्या) इस प्रकार कई उदाहरण किए जाएगे ।

उसी प्रकार आपसे कई त्रिभुज उतारने के लिए कहे जाएगे उनके अतः कोणो का योग 180° उतारने में कुछ गहित हो तो भी उनका योग 180° ही होगा।

इस पद्धति में क्या गलती है? कई गणित के प्रश्न जाँच किए जा सकते है। जिससे हम यह नही कह सकते कि दिया गया। कथन हमेशा सत्य ही होगा। उदाहरण दो सम संख्याओ का गुणा हमेशा सभ ही होगा। हम प्रत्येक संख्या के लिए इसे जाँच नही सकते है क्योंकि कई सम संख्याएँ है। सभी सम संख्याओं का गुणनफल करना संभव नहीं है क्योंकि अनंत सम संख्याएँ होती है। उसी प्रकार कुछ त्रिभुज ऐसे होगे जिसके तीनों कोणो का योग 180° नहीं हो सकता है अभी हमने उनकी जाँच भी नहीं की है।

कभी कभी जाँच करने मे भी कुछ गल्तियाँ हो जाती है, पास्कल का त्रिभुज (Pascal's triangle) पास्कल त्रिभुज के अनुसार $11^5 = 15101051$ वास्तव में $11^5 = 161051$ हैं।

अतः आपको एक ऐसे जाँच पद्धति की आवश्यकता होती तो किसी संदर्भ में दूसरे तथ्यों पर आधारित नहीं होगी। एक ऐसा तरीका जो गणितिय कथन की सत्यता को बताता है उसे ही हम गणितिय उपपत्ति कहते है । जो शुद्ध रूप से कई तार्किक कथनों पर आधारित होता है।

गणितीय कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए एक प्रतिकूल उदाहरण की आवश्यकता होगी। इसलिए जब उसका मूल्यांकन सही सिद्ध करने के लिए पर्याप्त नहीं होगा यदि वह हजारों जाँचों के लिए सत्य सिद्ध नहीं होता है। किसी भी कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए केवल एक प्रतिकूल उदाहरण पर्याप्त होता है।

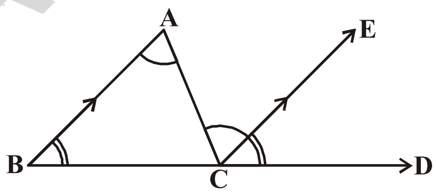
गणितीय कथन यदि असत्य हो तो एक प्रतिकूल उदाहरण दे सकते है ।

i. सर्वप्रथम हम यह देखगे कि कौनसी विधि से हम सिद्ध करेगे कि आगे कैसे बढ़ा जाये ।

ii. गणितीय कथन के अनुसार उपपत्ति कैसे लिखी जा सकती है । प्रत्येक कथन के लिए जब प्रमेय लिखा जाता है तो देखा जाता है क्या दिया गया है। स्वयंतथ्य पर आधारित है या नही ।

iii. गणितिय कथन तार्किक रूप से सत्य है तो हम उपपत्ति द्वारा सिद्ध करके प्रमेय की सत्यता सिद्ध कर सकते है ।

समझने के लिए प्रमेय को उपपत्ति के आधार पर सिद्ध किया जा सकता है। चित्र की सहायता से प्रमेय को भी सिद्ध किया जा सकता है। तर्क की सहायता से भी। यदि दो रेखाओ के मध्य का कोण $90°$ हो तो रेखाएँ परस्पर लम्ब होगी ।



प्रमेय -15.4 : त्रिभुज के तिनों कोणो का योग $180°$ होता है ।

उपपत्ति : त्रिभुज ABCमें

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180$ (सिद्ध करना है)

CE रेखा BA के समानान्तर खिचो बिन्दु C से BC रेखा बिन्दु D तक बढ़ाओ ।

CE BA तथा AC तिर्थक रेखा है।

$\angle CAB = \angle ACE$, (एकान्तर कोण) ..... (1)

$\angle ABC = \angle DCE$ संगत कोण ..... (2)

eq. (1) और (2) जोड़ने पर

$$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE \quad ..... (3)$$

$\angle BCA$ दोनो ओर जोड़ने पर

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE \quad ..... (4)$$

$$\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180° \quad ..... (5)$$

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$$

अब हम देखेगे कि प्रत्येक क्रम तार्किक रूप से उपपत्ति से जुड़ा है ।

क्रम-1:हमारा प्रमेय त्रिभुज के गुणो के बारे में बताता है। अतः हम ABC के बारे में जानेगे ।

क्रम-2: प्रमेय को सिद्ध करने के लिए CE *ll* BA और BC को D तक बढ़ाओ ।

क्रम-3:$\angle CAB = \angle ACE$ और $\angle ABC = \angle DCE$, CE *ll* to BA (रचना से) पूर्व प्रमेय के अनुसार यदि दो रेखाएँ समानान्तर है और तिर्थक रेखा काटती है तो एकान्तर कोण, संगत कोण बराबर होते है।

क्रम-4: युक्लीड स्वयं तथ्य के अनुसार ''यदि एक समान दोनों ओर जोड़ा तो पूरे आपस मे बराबर होंगे ।$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$.

अतः त्रिभुज के तीन अंतः कोणो का योग सरल रेखा पर के कोणो के योग के बराबर होगा।

क्रम-5: युक्लीड के स्वयं तथ्य अनुसार कथन ''समान वस्तुएँ एक दूसरे के समान होगे ।

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$ सिद्ध है।

प्रमेय -15.5 :

दो विषम संख्याओ का गुण विषम संख्या होती है।

उपपत्ति: मान लो x और y कोई दो विषम संख्याएँ है।

हमें सिद्ध करना है xy एक विषम संख्या है ।

क्योकि x तथा y विषम संख्या है $x = (2m - 1)$, किसी प्राकृतिक संख्या m के लिए और $y = 2n - 1$ कोई प्राकृतिक संख्या n के लिए

$$\begin{aligned} xy &= (2m-1)(2n-1) \\ &= 4mn - 2m - 2n + 1 \\ &= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1 \\ &= 2(2mn - m - n + 1) - 1 \end{aligned}$$

मान लो $2mn - m - n + 1 = l$ कोई प्राकृतिक संख्या

$$= 2l - 1, l \in N$$

यह एक विषम संख्या है ।

(**प्रमेय-15.6 :** क्रमगात दो सम संख्याओ का गुणा 4 से विभाजित है ।)

कोई भी सम संख्या $2m$, $2m + 2$, किसी प्राकृतिक संख्या n के लिए हमे सिद्ध करना है $2m\,(2m + 2)$ इनका गुणा 4 से विभाजित है ।

इस अध्याय को हम कुछ टिप्पणीयों से निष्कर्षित करेंगे कैसे गणितज्ञों ने परिणामों को प्राप्त किया और हम कैसे स्पष्ट उपपत्तियों को लिखा गया हैं जो ऊपर दर्शाया गया है प्रत्येक उपपत्ति का एक महत्वपूर्ण आरम्भ होता है। गणितज्ञों का विचार करने की पद्धति और परिणामों को खोजने की विधि स्वाभाविक होती है। हमेशा गणितज्ञ अलग-अलग तरीकों से उदाहरण तथा तर्कों को सोचता है। जब वह किसी क्रियात्मक दशा में पहुँचता है तो अपने परिणामों के लिए प्रमाण ढूँढता है।

हमने दोनों आगमन तथा निगमन विधि का विचार कुछ उदाहरणों सहीत किया है।

यहाँ पर यह मूल्यवान बात है कि महान गणितज्ञ रामानुजन को परिणामों पर पहुँचने की सहज सिद्धता प्राप्त थी। जो उन्होंने सत्य सिद्ध किये हैं उनमें से कई सत्य सिद्ध होकर प्रमेय बन चुके है।

अभ्यास - 15.4

1. निम्न में से कौनसे गणितीय कथन है और कौन से नही? कारण बताओ ?
   i. उसकी आँखे नीली है ।
   ii. $x + 7 = 18$
   iii. आज रविवार नही है ।
   iv. प्रत्येक संख्या के लिए x, $x + 0 = x$
   v. अब क्या समय होगा ?
2. निम्न कथनो को असत्य बताने के लिए प्रतिकूल उदाहरण बताइए ।
   i. प्रत्येक आयत वर्ग ही होगा ।
   ii. कोई पूर्ण संख्या x और y, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
   iii. यदि n कोई पूर्णांक संख्या हो तो $2n^2 + 11$ एक रूढ़ संख्या है ।
   iv. दो त्रिभुज सर्वसमान होगे यदि क्रम से उनके कोण बराबर है ।
   v. चर्तुभुज जिसकी चारो भुजाएँ बराबर है वह वर्ग है ।
3. दो विषम संख्याओ का योग सम है ।
4. दो सम संख्याओ का गुणा सम संख्या है ।
5. यदि x विषम हो तो x^2 भी विषम होगा सिद्ध करो ।

6. परिक्षण करके देखो

   i. कोई संख्या सोचो दुगुना करो ९ जोड़ो अब सोची गई संख्या जोड़ो तीन से भाग दो. अब ४ जोड़ो दी हुई संख्या धटाओ आपका उत्तर सम होगा ।

   ii. तीन अंको वाली संख्या लिखो (उदा 425). अब ६ अंको वाली संख्या लिखो इन्ही संख्याओ को क्रमागत लिखो (425425) आपका नया नम्बर 7, 11, और 13 से विभाजित होगा

हमने क्या सीखा?

1. वाक्य जो किसी कारण वश कहे जाए सत्य या असत्य उसे कथन कहेगे ।
2. गणितीय कथन साधारण कथनो से अलग होते है। प्रतिकूल उदाहरण देकर उन्हे सिद्ध नही किया जा सकता है ।
3. तार्किक विचार विमर्श से क्रमशः गणित के प्रमेयों को हल करते समय परिकल्पना का मार्ग खोलते है ।
4. गणितीय कथन जिसे तार्किक रूपसे सत्य बताया जाता है उसे गणितीय उपपत्ति कहते है ।
5. स्वयं तथ्य ऐसे कथन है जो बिना किसी उपपत्ति के सत्य कहे जाते है ।
6. परिकल्पना एक ऐसा कथन है जो सत्य है गणितीय भावना के अनुसार उसे अभी सिद्ध करना है।
7. गणितीय वाक्य जिसकी सत्यता सिद्ध की जाती है । उसे प्रमेय कहते है ।
8. गणितीय प्रमेयों को तार्किक विधि से हल करने को निगमन विधि कहते हैं ।
9. निरूपण का अर्थ गणित के प्रमेयों को क्रमबद्ध रूप से लिखना होता है ।
10. प्रमेय में शुरु में दिया गया कथन और एक निषकर्ष पर अन्त में तार्किक रुप से सिद्ध करके पहुँचते है ।
11. उपपत्ति में कभी कभी जो दिया गया है उसे न मानकर अलग तरीके से सिद्ध करते है और अन्त में हम इस निषकर्ष पर पहुँचते है कि जो हमने सोचा वह गलत है ।
12. अकल्पनीय कथनों को निगमन पद्धति से सत्यता को तर्क पूर्ण पद्धति से निर्माण किया जा सकता है।
13. विभिन्न घटनाओं की जाँच के द्वारा दत्तों के समूहों की अन्वेषण पद्धति तथा निष्कर्ष प्राप्त करने के विधि को आगमन पद्धति कहते है।

उत्तर

अभ्यास 1.1

1.a. -5, $\frac{22}{7}$, $\frac{-2013}{2014}$

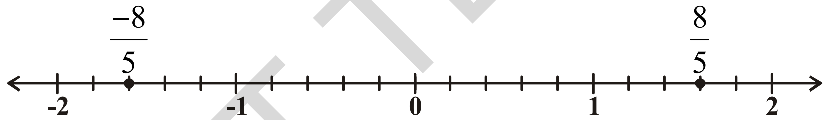
b. एक संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ की तरह लिखा जाता है जहाँ $q \neq 0$; p, q पूर्णांक हैं, वे परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।

2. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) -5

(iv) 7 (v) -3

3. $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{21}{16}, \frac{53}{32}$ 4. $\frac{19}{30}, \frac{37}{60}, \frac{77}{120}$

5.



6. I. (i) 0.242 (ii) 0.708 (iii) 0.4 (iv) 28.75

II.(i) $0.\overline{6}$ (ii) $-0.69\overline{4}$ (iii) $3.\overline{142857}$ (iv) $1.\overline{2}$

7. (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{77}{5}$ (iii) $\frac{41}{4}$ (iv) $\frac{13}{4}$

8. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{35}{9}$ (iii) $\frac{12}{33}$ (iv) $\frac{563}{180}$

9. (i) Yes (ii) No (iii) Yes (iv) No

अभ्यास 1.2

1. (i) अपरिमेय (ii) परिमेय (iii) अपरिमेय

(iv) परिमेय (v) परिमेय (vi) अपरिमेय

2. परिमेय संख्याएँ : $-1, \frac{13}{7}, 1.25, 21.\bar{8}, 0$

परिमेय संख्याएँ : $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \pi, 2.131415....., 1.1010010001.....$

3. अनंत, $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. 0.71727374....., 0.761661666.....   5. $\sqrt{5} = 2.236$

6. 2.645751.....   8. $\sqrt{6}, \sqrt{2\sqrt{6}}$

9. (i) सत्य   (ii) सत्य   (iii) असत्य $\sqrt{3}$ (iv) सत्य $\sqrt{9}$

(v) सत्य $\sqrt{8}$ (vi) असत्य $\frac{3}{7}$

अभ्यास 1.4

1. (i) $10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$ (ii) 20

(iii) $10 + 2\sqrt{21}$ (iv) 4

2. (i) अपरिमेय   (ii) अपरिमेय   (iii) अपरिमेय   (iv) परिमेय

(v) अपरिमेय   (vi) अपरिमेय   (vii) परिमेय

3. (i) अपरिमेय   (ii) परिमेय   (iii) अपरिमेय   (iv) अपरिमेय

(v) अपरिमेय   (vi) परिमेय

4. क्योंकि c या d अपरमिय संख्या हो सकती है।

5. (i) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (iv) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

6. (i) $17-12\sqrt{2}$ (ii) $6-\sqrt{3}$ (iii) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

(iv) $\frac{9\sqrt{15}-3\sqrt{10}-3\sqrt{21}+\sqrt{14}}{25}$ 7. 0.55725

8. (i) 2   (ii) 2   (iii) 5   (iv) 64

(v) 9   (vi) $\frac{1}{6}$ 9. -8

10. (i) a = 5, b = 2   (ii) $a = \frac{-19}{7}, b = \frac{5}{7}$

अभ्यास 2.1

1. (i) 5   (ii) 2   (iii) 0   (iv) 6

(v) 2   (vi) 1

2. (i) बहुपदी (ii) बहुपदी (iii) नहीं क्योंकि इसमें दो चर राशियाँ हैं।
(iv) बहुपदी नहीं है क्योंकि घातांक ऋणात्मक हैं।
(v) बहुपदी नहीं है क्योंकि घातांक ऋणात्मक हैं।
(vi) बहुपदी नहीं क्योंकि इसमें दो चर राशियाँ हैं।

3. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 2
(v) $\frac{\pi}{2}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) 0 (viii) 0

4. (i) चतुर्भुज (ii) घनाभ (iii) चतुर्भुज (iv) रेखीय
(v) रेखीय (vi) चतुर्भुज

5. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य
(v) सत्य (vi) सत्य

अभ्यास 2.2

1. (i) 3 (ii) 12 (iii) 9 (iv) $\frac{3}{2}$

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3
(v) 2, 0, 0

3. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं, हाँ
(v) हाँ (vi) हाँ (vii) हाँ, नहीं (viii) हाँ, नहीं

4. (i) -2 (ii) 2 (iii) $\frac{-3}{2}$ (iv) $\frac{3}{2}$
(iv) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-q}{p}$

5. $a = \frac{-2}{7}$ 6. $a = 1, b = 0$

अभ्यास 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1
(iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $\frac{-27}{8}$

2. $5p$ 3. गुणनखंड नहीं है क्योंकि शेष 5 4. -3 5. $\frac{-13}{3}$

6. $\frac{-13}{3}$ 7. 8 8. $\frac{21}{8}$ 9. $a = -7, b = -12$

अभ्यास 2.4

1. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) नहीं
2. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) हाँ
   (v) हाँ
7. (i) $(x-1)(x+1)(x-2)$ (ii) $(x+1)^2(x-5)$
   (iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y+1)(y+1)(y-1)$
9. a = 3 10. $(y-2)(y+3)$

अभ्यास 2.5

1. (i) $x^2 + 7x + 10$ (ii) $x^2 - 10x + 25$
   (iii) $9x^2 - 4$ (iv) $x^4 - \frac{1}{x^4}$ (v) $1 + 2x + x^2$
2. (i) 9999 (ii) 998001 (iii) $\frac{9999}{4} = 2499\frac{3}{4}$
   (iv) 251001 (v) 899.75
3. (i) $(4x+3y)^2$ (ii) $(2y-1)^2$ (iii) $\left(2x+\frac{y}{5}\right)\left(2x-\frac{y}{5}\right)$
   (iv) $2(3a+5)(3a-5)$ (v) $(x+3)(x+2)$
   (vi) $3(P-6)(P-2)$
4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$
   (ii) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
   (iii) $4a^2 + 25b^2 + 9c^2 - 20ab - 30bc + 12ac$
   (iv) $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{ab}{4} - b + \frac{a}{2}$
   (v) $p^3 + 3p^2 + 3p + 1$ (vi) $x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$
5. (i) $(-5x+4y+2z)^2$ (ii) $(3a+2b-4c)^2$
6. 29
7. (i) 970299 (ii) 1,0,61,208 (iii) 99,40,11992 (iv) 100,30,03,001
8. (i) $(2a+b)^3$ (ii) $(2a-b)^3$ (iii) $(1-4a)^3$ (iv) $\left(2p-\frac{1}{5}\right)^3$
10. (i) $(3a+4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$ (ii) $(7y-10)(49y^2 + 70y + 100)$
11. $(3x+y+z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$

14. (i) -630 (ii) 16380 (iii) $\frac{-5}{12}$ (iv) −0.018

15. (i) $(2a+3)(2a-1)$ (ii) $(5a-3)(5a-4)$

16. (i) $3x(x-2)(x+2)$ (ii) $4(3y+5)(y-1)$

अभ्यास 3.

1. (i) 3 (ii) 13 (iii) छः (iv) 180°

   (v) बिंदु, समतल, रेखा

2. a) असत्य b) सत्य c) सत्य d) सत्य

   e) सत्य 7) अनंत

   8) रेखायें उस ओर एक दूसरे को काटती है जिस ओर कोणों का योगफल 180^0 से कम होगा।

9. $\angle 1 = \angle 2$

अभ्यास 4.1

2. (i) परावर्तन कोण (ii) समकोण (iii) न्यूनकोण

3. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

   (v) सत्य (vi) सत्य (vii) असत्य (viii) सत्य

4. (i) 270° (ii) सरलकोण 180° (iii) अधिक कोण 210°

अभ्यास 4.2

1. $x = 36°$ $y = 54°$ $z = 90°$

2. (i) $x = 23°$ (ii) $x = 59°$ (iii) $x = 20°$ (iv) $x = 8°$

3. $\angle BOE = 30°$; $\angle COE = 250°$ का परावर्तन कोण

4. $\angle C = 126°$

8. $\angle XYQ = 122°$ $\angle QYP = 302°$

अभ्यास 4.3

2. $x = 126°$

3. $\angle AGE = 126°$ $\angle GEF = 36°$ $\angle FGE = 54°$

4. $\angle QRS = 60°$ 5. $\angle ACB = z = x + y$

6. $a = 40°$; $b = 100°$

7. (i) $\angle 3, \angle 5, \angle 7, \angle 9, \angle 11, \angle 13, \angle 15$

   (ii) $\angle 4, \angle 6, \angle 8, \angle 10, \angle 12, \angle 14, \angle 16$

8. $x = 60°$ $y = 59°$
9. $x = 40°$ $y = 40°$
10. $x = 60°$ $y = 18°$
11. $x = 63°$ $y = 11°$
13. $x = 50°$ $y = 77°$
15. (i) $x = 36°$; $y = 108°$ (ii) $x = 35°$ (iii) $x = 29°$
16. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 80°$; $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 100°$
17. $x = 20°$ $y = 60°$ $z = 120°$
18. $x = 55°$ $y = 35°$ $z = 125°$
19. (i) $x = 140°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 250°$

अभ्यास 4.4

1. (i) $x = 110°$ (ii) $z = 130°$ (iii) $y = 80°$
2. $\angle 1 = 60°$ 3. $x = 35°, y = 51°$ 5. $x = 50°$ $y = 20°$
6. $x = 70°$ $y = 40°$ 7. $x = 30°$ $y = 75°$
8. $\angle PRQ = 65°$ 9. $\angle OZY = 32°$; $\angle YOZ = 121°$
10. $\angle DCE = 92°$ 11. $\angle SQT = 60°$ 12. $z = 60°$
13. $x = 37°$ $y = 53°$ 14. $\angle A = 50°$; $\angle B = 75°$
15. (i) 78° (ii) $\angle ADE = 67°$ (iii) $\angle CED = 78°$
16. (i) $\angle ABC = 72°$ (ii) $\angle ACB = 72°$
(iii) $\angle DAB = 27°$ (iv) $\angle EAC = 32°$
17. $x = 96°$ $y = 120°$

अभ्यास 5.1

1. (i) पानी की टंकी (ii) मिस्टर 'J' हाउस
(iii) गली संख्या-2, पूर्व दिशा में चलने पर दायीं ओर का अंतिम घर
(iv) गली संख्या-4, पूर्व दिशा में चलने पर दायीं ओर का पहला बंग्ला
(v) गली संख्या-4, पूर्व दिशा में चलने पर बायीं ओर का अंतिम घर

अभ्यास 5.2

1. (i) Q_2 (ii) Q_4 (iii) Q_1 (iv) Q_3
(v) Y-अक्ष (vi) X-अक्ष (vii) X-अक्ष (viii) Y-अक्ष
2. (i) भुज (abscissa): 4 (ii) भुज (abscissa): -5 (iii) भुज (abscissa): 0 (iv) भुज (abscissa): 5

कोटि: -8   कोटि: 3   कोटि: 0   कोटि: 0

(v) भुज (abscissa): 0

कोटि : -8

3. (ii) (0, 13) : Y-अक्ष   (iv) (-2, 0) : X-अक्ष

(v) (0, -8) : Y-अक्ष   (vi) (7, 0) : X-अक्ष

(vii) (0, 0) : दोनों अक्षों पर

4. (i) -7   (ii) 7   (iii) R   (iv) P

(v) 4   (vi) -3

5. (i) असत्य   (ii) सत्य   (iii) सत्य   (iv) असत्य

(v) असत्य   (vi) असत्य   (vi) (i) सभी बिंदू x-अक्ष पर है (ii) सभी बिंदू y-अक्ष पर है

अभ्यास 5.3

2. नहीं, (5, -8) स्थित है Q_4 में और (-8, 5) स्थित है Q_2 में
3. सभी बिंदु Y-अक्ष के समानांतर एक इकाई दूरी की रेखा पर स्थित हैं।
4. सभी बिंदु X-अक्ष के समानांतर 4 इकाई दूरी की रेखा पर स्थित हैं।
7. (2, 3), (4, 1), (0,5), (-1, 6), (-3, 8)
8. A (-3, 4), B (0, 5), C (3, 4), D (2, 4), E (2, 0), F (3, 0), G (3, -1), H (0, -1)

अभ्यास 6.1

1. (i) $a = 8$ $b = 5$ $c = -3$

(ii) $a = 28$ $b = -35$ $c = 7$

(iii) $a = 93$ $b = 15$ $c = -12$

(iv) $a = 2$ $b = 5$ $c = 0$

(v) $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{4}$ $c = -7$

(vi) $a = \frac{3}{2}$ $b = 1$ $c = 0$

(vii) $a = 3$ $b = 5$ $c = -12$

2. (i) $a = 2$ $b = 0$ $c = -5$

(ii) $a = 0$ $b = 1$ $c = -2$

(iii) $a = 0$ $b = \frac{1}{7}$ $c = -3$

(iv) $a = 1$ $b = 0$ $c = \frac{14}{13}$

3. (i) $x + y = 34$ (ii) $2x - y + 10 = 0$

(iii) $x - 2y - 10 = 0$ (iv) $2x + 15y - 100 = 0$

(v) $x + y - 200 = 0$ (vi) $x + y - 11 = 0$

अभ्यास 6.2

2. (i) $(0, -34); (\frac{17}{4}, 0)$ (ii) $(0, 3) ; (-7, 0)$

(iii) $(0, \frac{3}{2}) ; (\frac{-3}{5}, 0)$

3. (i) हल नहीं है (ii) हल (iii) हल

(iv) हल नहीं है (v) हल नहीं है

4. k = 7 5. $\alpha = \frac{8}{5}$ 6. 3

अभ्यास 6.3

2. (i) हाँ (ii) हाँ
3. 3
4. (i) 6 (ii) -5
5. (i) $(\frac{3}{2}, 3)$ (ii) (-3, 6)
6. (i) (2, 0) : (0, -4) (ii) (-8, 0) ; (0, 2)

(iii) (-2, 0) ; (0, -3)
7. $x + y = 1000$ 8. $x + y = 5000$ 9. $f = 6a$ 10. 39.2
11. $5x = 3y$; 2000 ; 480 (मतदान देने वाले मतदाताओं की संख्या = x, कुल मतदाताओं की संख्या = y)
12. x - y = 25; 50; 15 (पिता की आयु = x, रूपा की आयु = y)
13. $y = 8x + 7$ 6कि.मी., 63₹. 14. $x + 4y = 27$; 5, 11
15. $y = 10x + 30$; 60; 90; 5 घंटे (घंटों की संख्या = x ; पार्किंग शुल्क = y)
16. d = 60 t (d = दूरी, t = समय); 90 किमी; 120 किमी; 210 किमी
17. $y = 8x$; $\frac{3}{2}$ या $1\frac{1}{2}$; 12
18. $y = \frac{5}{7}x$ (मिश्रण की मात्रा = x; दूध की मात्रा = y) ; 20
19. (ii) 86° F (iii) 35° C (iv) -40

अभ्यास 6.4

4. (i) $y = -3$ (ii) $y = 4$ (iii) $y = -5$ (iv) $y = 4$
5. (i) $x = -4$ (ii) $x = 2$ (iii) $x = 3$ (iv) $x = -4$

अभ्यास 7.4

6. 7
7. नहीं

अभ्यास 8.1

1. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य
   (v) असत्य (vi) असत्य
2. (a) हाँ, नहीं, नहीं, नहीं, नहीं, (b) नहीं, हाँ, हाँ, हाँ, हाँ,
   (c) नहीं, हाँ, हाँ, हाँ, हाँ, (d) नहीं, हाँ, हाँ, हाँ, हाँ,
   (e) नहीं, हाँ, हाँ, हाँ, हाँ, (f) नहीं, हाँ, हाँ, हाँ, हाँ,
   (g) नहीं, नहीं, नहीं, हाँ, हाँ, (h) नहीं, नहीं, हाँ, नहीं, हाँ,
   (i) नहीं, नहीं, नहीं, हाँ, हाँ, (j) नहीं, नहीं, हाँ, नहीं, हाँ,
4. चार कोण = 36°, 72°, 108°, 144°

अभ्यास 8.3

1. समानांतर चतुर्भुज के कोण = 73°, 107°, 73°, 107°
2. समानांतर चतुर्भुज के कोण = 68°, 112°, 68°, 112°

अभ्यास 8.4

1. BC = 8 सेमी

अभ्यास 9.1

1.

प्राप्तांक	5	6	7	8	9	10
बारंबारिता (f)	5	6	8	12	9	5

2.

ब्लड ग्रुप	A	B	AB	O
बारंबारिता (f)	10	9	2	15

सर्वाधिक सामान्य रक्त वर्ग = O ; सर्वाधिक दुर्लभ रक्त वर्ग = AB

3.

हेड की संख्या	0	1	2	3
बारंबारिता (f)	3	10	10	7

4.

विकल्प A	B	C	
बारंबारिता (f)	19	26	10

कुल करीबी उत्तर = 65

सर्वाधिक लोगों का मत = B (केवल आम स्थानों पर निषेध)

5.

वाहनों की संख्या	कार	बाइक	ऑटो	साइकिल
वाहनों की संख्या (f)	25	45	30	40

6. पैमाना : X-अक्ष पर = 1 cm. = 1 वर्गांतर

X-अक्ष पर = 1 cm. = 10 छात्रों की संख्या

कक्षा	I	II	III	IV	V	VI
छात्रों की संख्या (f)	40	55	65	50	30	15

7.

प्राप्तांक (वर्गांतर)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
छात्रों की संख्या(f)	1	4	3	7	7	7	1	0

8.

विद्युत बिल (रु. में) (वर्गांतर)	घरों की संख्या (f)
150 - 225	4
225 - 300	3
300 - 375	7
375 - 450	7
450 - 525	0
525 - 600	1
600 - 675	1
675 - 750	2

9.

चलने की अवधि (वर्ष में) (वर्गांतर)	2-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.0
बैटरियों की संख्या	2	6	14	11	4	3

अभ्यास 9.2

1. $\bar{x} = 85$ 2. $\bar{x} = 1.71$ 3. K = 10

4. $\bar{x} = 17.7$

5. (i) ₹ 359, ₹ 413, ₹ 195, ₹ 228, ₹ 200, ₹ 837

(ii) ₹444 प्रति पाठशाला बचत

6. लड़के की लंबाई = 147 से.मी. ; लड़की की लंबाई = 152 से.मी.

7. $\bar{x}$ = 11.18 ; Mode = 5 ; Median = 10

8. $\bar{x}$ = 80 ; Median = 75 ; Mode = 50

9. 37 kgs 10. ₹11.25, Median = ₹ 10; Mode = ₹ 10

11. 1st = 2 ; 2nd = 6 ; 3rd = 19 ; 4th = 33

अभ्यास 10.1

1. (i) 64 व.से.मी. 96 वर्ग मी (ii) 140 व. से.मी. 236 वर्ग से.मी.

2. 3375 वर्ग मी 3. 330 वर्ग मी 4. 8 मी

5. (i) वास्तविक क्षेत्रफल के 4 गुणा (ii) वास्तविक क्षेत्रफल के 9 गुणा

6. 60 घन से.मी. 7. 16 घन मी 8. 3750 ली.

अभ्यास 10.2

1. 6.90 वर्ग मी. 2. 176 वर्ग सेमी; 253 वर्ग से.मी.

3. r = 7.5 से.मी. 4. h = 25 मी.

5. (i) 968 वर्ग से.मी. (ii) 1064.8 वर्ग से.मी. (iii) 2032 वर्ग से.मी.

6. ₹338. 80 7. 1584 वर्ग मी.

8. (i) 110 वर्ग मी. (ii) ₹4400

9. (i) 59.4 वर्ग मी. (ii) 96.48 वर्ग मी. 10. 517.44 ली. 11. h = 20 से.मी.

अभ्यास 10.3

1. h = 6 से.मी. 2. h = 9 से.मी.

3. (i) 7 से.मी. (ii) 462 वर्ग से.मी. 4. 1232 घन से.मी.

5. 1018.3 घन से.मी. 6. ₹.7920,15मी. 7. $3394\frac{2}{7}$ घन से.मी.

8. 241.84 वर्ग मी (लगभग) 9. 63 मी. 10. 6135.6 व. से.मी.

11. 24.7 मिनट 12. 60 π वर्ग इकाई

अभ्यास 10.4

1.154 वर्ग सेमी; 179.67 घन सेमी 2. 3054.86 घन से.मी.

3. 616 वर्ग से.मी. 4. 6930 वर्ग से.मी. 5. 4 : 9 ; 8 : 27

6. 942 वर्ग से.मी. 7. 1 : 4 8. 441 : 400 9. 55 kg.

10. 5 से.मी. 11. 0.303 लीटर 12. बोतलों की संख्या = 9

अभ्यास 11.1

1. 19.5 वर्ग सेमी 2. 1/4 वर्ग सेमी 3. 36 वर्ग सेमी

अभ्यास 11.2

1. 8.57 सेमी 2. 6.67 सेमी

अभ्यास 12.1

1. (i) त्रिज्या (ii) व्यास (iii) छोटा चाप
(iv) ज्या (v) छोटा चाप (vi) अर्द्धवृत्त
(vii) ज्या (viii) लघु वृत्तखंड

2. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) असत्य
(v) असत्य (vi) सत्य (vii) सत्य

अभ्यास 12.2

1. 90° 2. 48°, 84° 3) हाँ

अभ्यास 12.4

1. 130° 2. 40° 3. 60°, 120° 5. 5 से.मी.

6. 6 सेमी 7. 4 सेमी 9. 70°, 55°, 55°

अभ्यास 12.5

1. (i) $x° = 75°\ ;\ y° = 75°$ (ii) $x° = 70°\ ;\ y° = 95°$
(ii) $x° = 90°\ ;\ y° = 40°$

4. (a), (b), (c) , (e), (f) = संभव ; (d) = असंभव

अभ्यास 14.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 5 और 6 (b) हाँ (c) $\frac{1}{3}$

2. (a) $\frac{45}{100}$; $\frac{55}{100}$ (b) 1

3. (a) लाल (b) पीला (c) नीला, हरा और लाल (d) अवसर नहीं

   (e) नहीं (यह एक अनियमित प्रयोग है)

4. (a) नहीं

   (b) P (हरा) = $\frac{5}{12}$; P (नीला) = $\frac{1}{4}$; P (लाल) = $\frac{1}{6}$; P (पीला) = $\frac{1}{6}$

   (c) 1

5. (a) P(E) = $\frac{5}{26}$ (b) P(E) = $\frac{5}{13}$ (c) 1 (d) $\frac{21}{26}$

6. P(E) = $\frac{7}{11}$

7. (i) P = $\frac{61}{2000}$ (ii) P = $\frac{9}{80}$ (iii) P = $\frac{261}{400}$ 8. 21.5%

अभ्यास 15.1

1. (i) सदा असत्य रहता है। महीने में न्यूनतम 27 दिन होते हैं। सामान्यतः महीने 30 और 31 दिन के होते हैं।

   (ii) अस्पष्ट, सामान्यतः मकर संक्रांति शुक्रवार को नहीं आता

   (iii) अस्पष्ट, कभी सर्दी के मौसम में हैदराबाद का तापमान 2°C होने की संभावना है

   (iv) सत्य, यह वास्तवकिता हम सब जानते हैं, लेकिन यह कभी वैज्ञानिकों द्वारा अन्य ग्रहों की खोज के बाद परिवर्तित भी हो सकता है।

   (v) सदैव अशत्य। कुत्तें कभी उड़ नहीं सकते।

   (vi) अस्पण्ट, लीप वर्ष में फरवरी के 29 दिन होते हैं।

2. (i) असत्य, चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग 360° होता है।

   (ii) सत्य, उदाहरण सभी ऋणात्मक संख्याएँ।

   (iii) सत्य, समचतुर्भुज में सम्मुख भुजायें एक दूसरे के समानान्तर होती है। इसलिए समचतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज होता है।

   (iv) सत्य

   (v) नहीं, सभी वर्ग संख्याओं को दो विषम संख्याओं के योग रूप नहीं लिखा जा सकता। उदाः 9 = 4+5

3. (i) सीर्फ प्राकृतिक संख्याएँ

(ii) प्राकृतिक संख्याओं का दो गुना हमेशा सम संख्या होती है।

[उदाः $2\times\frac{5}{2}=5$ (विषम संख्या)]

(iii) किसी भी $x > 1, 3x + 1 > 4$ (iv) किसी भी $x \geq 0, x^3 \geq 0$

(v) समबाहु त्रिभुज में, मध्यिका कोणों का समद्विभाजक होती है।

4. कोई भी ऋणात्मक संख्या लीजिए। x y

$-2 > -3$

$x^2 = -2 \times -2 = 4$ (यहाँ $x^2 < y^2$)

$y^2 = -3 \times -3 = 9$

अभ्यास 15.2

1. (i) जीवन मर्त्य (mortal) है।

(ii) नहीं, X कोई भी दूसरे राज्य का जैसे मराठी, गुजराती, पंजाबी आदि हो सकता है।

(iii) गुलाग की जीभ लाल है।

(iv) सभी सयाने राष्ट्रपति नहीं हो सकते, यहाँ हमें दिया ग या है कि सभी राष्ट्रपति सयाने होते हैं? कुछ और लोग जैसे कुछ अध्यापक, विद्यार्थी भी सयाने हो सकते है।

2. आपको B तथा 8 पर मुडना चाहिए। यदि 8 के दूसरी ओर सम संख्या हो तो नियम भंग हो सकता है। उसी प्रकार यदि 8 के दूसरी ओर व्यंजन हो तो भी नियम भंग होगा।

3. उत्तर. 35.

- कथन 'a' सहायक नहीं है। क्योंकि दूसरे संकेत जो बताते है कि आपको एक से अधिक अंकों की आवश्यकता है।
- कथन 'b' सहायक नहीं है। क्योंकि इकाई के स्थान वाला अंक दहाई से बड़ा होना चाहिए तथा 7 और 10 का गुणनफल 70 होता है जिसमें 0, 7 से छोटा है।
- कथन 'c' सहायक हैं क्योंकि 7 के गुणकों में बहुत सारे संख्याओं की सभावनाएँ है।
- कथन 'd' सहायक है क्योंकि वह विषम संख्या होने के कारण अन्य कई संभावनाओं को उत्पन्न करती है।
- कथन 'e' सहायक नहीं हैं क्योंकि केवल 7 और 11 का गुणनफल ही 77 होगा जहाँ पर इकाई के स्थान दहाई से बड़ा नहीं है।
- कथन 'f' सहायक नहीं हैं।
- कथन 'g' सहायक हैं क्योंकि उसके उपयोग कुछ संख्यायें ही छूटती है।
- कथन 'h' के उपयोग से शेष 35 रहता है अतः वह सहायक है।

अतः- 3, 4, 7 तथा 8 सहायक है वे ही संख्या को प्राप्त करने में उचित हैं।

अभ्यास 15.3

1. (i) तीन संभव प्राव्कलन (conjucture) इस प्रकार है।

   a) कीसी भी तीव क्रमबद्ध विषम संख्याओं का गुणनफल विषम संख्या ही होता है।

   b) किन्हीं तीन क्रमबद्ध विषम संख्याओं का गुणनफल 3 से भाज्य है।

   c) किन्हीं तीन क्रमबद्ध विषम संख्याओं के गुणनफल के अंको का योग सम होता है।

   (ii) तीन संभव प्राव्कलन है।

   a) तीन क्रमबद्ध संख्याओं का योगफल सम होता है।

   b) तीन क्रमबद्ध संख्याओं का योगफल 3 से भाज्य होता है।

   c) तीन क्रमबद्ध संख्याओं का योगफल 6 सें भी भाज्य होता है।

4. $111111^2 = 12345654321$ $\qquad$ $1111111^2 = 1234567654321$

   प्राव्कलन सत्य है।

5. अनुमान असत्य हैं क्योंकि आप $x = 41$ के लिए संयुक्त संख्या को ज्ञात नहीं कर सकते है।

अभ्यास 15.4

1. (i) नहीं $\qquad$ (ii) हाँ $\qquad$ (iii) नहीं

   (iv) हाँ $\qquad$ (v) नहीं

2. (i) एक आयत के कोण समान होने पर भी वह वर्ग नहीं हो सकता है।

   (ii) $x = 2; y = 3$ के लिए कथन सत्य नहीं हैं।

   (वह $x = 0; y = 1$ or $x = 0, y = 0$ के लिए ही सत्य सिद्ध होता है।)

   (iii) $n = 11, 2n^2 + 11 = 253$ के लिए जो रूढ़ी संख्या नहीं है।

   (iv) आप दो त्रिभुज समान कोण तथा भिन्न भुजाओं के बना सकते हैं।

   (v) समचतुर्भुज जिसकी भुजायें समान है वह वर्ग नहीं भी हो सकता हैं।

3. मानलों x तथा y दो विषम संख्याएँ हैं तो $x = 2m + 1$ किसी भी m प्राकृतिक संख्या के लिए तथा $y = 2n + 1$ किसी भी n प्राकृतिक संख्या के लिए।

   $x + y = 2\,(m + n + 1)$. इसलिए $x + y$, 2 से भाजित है तथा सम संख्या है।

4. मानलो $x = 2m$ तथा $y = 2n$

   गुणनफल $xy = (2m)\,(2n)$

   $= 4\,mn$

6. (i) मानलीजिए आपकी वास्तविक संख्या n है तब हम निम्नलिखित हल करेंगे।

$$n \to 2n \to 2n+9 \to +n = 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to n+3+4 = n+7 \to n+7-n = 7$$

   (ii) नोट कीजिए $7 \times 11 \times 13 = 1001$. कोई भी तीन अंकों वाली संख्या abc लीजिए, अब abc $\times$ $1001 = abcabc$. इसलिए 6 अंको वाली संख्या $abcabc$. 7, 11 तथा 13 विभाजित होगी।

पाठ्यक्रम

संख्या सिद्धान्त (50 hrs) (i) **वास्तविक संख्याएँ**	(i) **वास्तविक संख्याएँ** • प्राकृतिक संख्यायें, पूर्णांको तथा अकरणीय संख्याओं का संख्या रेखा पर प्रस्तुतीकरण का पुनरावलोकन। • आवर्त/अनावर्त दशमलव संख्याओं का संख्या रेखा पर आनुक्रमिक आवर्धक प्रस्तुतीकरण। • अकरणी संख्याओं को अनआवर्त दशमलव में बदलना। • $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ के वर्गमूल को भाग पद्धति से दशमलव के - 6 स्थानों तक ज्ञात करना। • करणी तथा आवर्त संख्याओं के उधाहरण को 1.01011011101111—दशमलव में दर्शाना 1.12112111211112—और $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ आदि। • अपरिमेय संख्यायें जैसे $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ का अस्तित्व तथा उनका संख्या रेखा पर प्रदर्शन। • पायथोगोरस के परिणामी उपयोग से प्रत्येक वास्तविक संख्या के अस्तित्व को संख्या रेखा पर दर्शाना। • करणी की धारणा। • करणीयों का परिमेयीकरण।
बिजगणित (20 hrs) (i) **बहुपदीय व्यंजक** (ii) **दो चर राशियों वाले रैखिक समीकरण**	(i) **बहुपदीय व्यंजकः-** • बहुपदीय व्यंजकों की परिभाषा एक चरराशी में, उनके गुणक उदाहरण सहित, उनके पद, बहुपदों के शून्य। • स्थिरांक, रैखिक, चतुर्थांश, तृतीयांश बहुपदों के, एक पदीय, द्विपदीय, त्रीपदीयों के शून्य/बहुपद/समीकरण के मूल। • उदाहरण सहित शेषांक प्रमेय का सिद्धीकरण तथा धनात्मक पूर्णांकों से उसकी सादृश्यता। • गुणांक प्रमेय का कथन तथा जांच $ax^2 + bx + c$ जहाँ $a \neq 0$ तथा a, b, c वास्तविक संख्या के गुणनखण्ड, बहुपदों के घनों द्वारा गुणांक प्रमेय को सिद्ध करना।

	• बिजगणितीय व्यंजको तथा समरूपता का पुनरावलोकन। • समरूपता के कुछ और प्रकारः $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+x^2+2xy+2yz+2zx$ $(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy\,(x \pm y)$ $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ बहुपदीय गुणनखण्डों में उनका उपयोग, सामान्यतः व्यंजकों को इन बहुपदों तक निम्नीकरण करण। (ii) **दो चरराशीयों के रैखिक समीकरणः-** • एक चरराशी वाले रैखिक समीकरण को याद करना। • दो चर राशी वाले समीकरणों का परिचय। • दो चर राशी वाले रैखिक समीकरणों का हल। • दो चर राशी वाले समीकरणों का आलेख। • x-अक्ष तथा y-अक्ष के समानान्तर रेखाओं का समीकरण। • x-अक्ष तथा y-अक्ष के समीकरण।
निर्देशांक ज्यामिति (5 hrs)	**निर्देशांक ज्यामिति** • कार्तीय पद्धति • दिए बिन्दु के निर्देशांको का निरूपण
ज्यामिति (40 hrs) (i) **ज्यामिति के तत्व** (ii) **रेखायें तथा काण** (iii) **त्रिभुज** (iv) **चतुर्भुज** (v) **क्षेत्रफल** (vi) **वृत्त** (vii) **ज्यामितीय रचनाएँ**	(i) **The Elements of Geometry** • इतिहास-यूक्लीद तथा भारत में ज्यामिति, युक्लीद की पद्धति से निरिक्षण कीये गये तथ्यों को गणितीय विधि से परिभाषित करना, उभयनिष्ठ/प्रचलित धारणा/अभिधारणा/अभिगृहीत तथा प्रमेय युक्लीद के पाँच अभिधारणाएँ। पाँचवी अभिधारणा के समधारणाएँ। स्वयंतथ्य तथा प्रमेय के बिच संबंध बताना। • दो बिन्दुओं से गुजरती हुई सिर्फ एक ही रेखा हो सकती है। • (हल) दो भिन्न रेखाओं का एक ही उभयनिष्ठ बिन्दु होता है।

(ii) रेखाएँ तथा कोण :

- (प्रेरणा) यदि रेखा पर किरण डाल दी जाए तो वे दो संलग्न कोणों का योग 180^0 होता है तथा उसका विलोम।
- (सिद्ध करना) यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करती है तो उनके सम्मुख कोण समान होते है।
- (प्रेरणा) : संगत कोणों एकान्तर कोण अंतः कोण जब एक तिर्यक दो समानान्तर रेखाओं कों कांटती है का परिणाम।
- (प्रेरणा) रेखाएँ, जो दी गयीं रेखा के समान्तर हो तो व आपस में एक दूसरे के समानान्तर होती है।
- (हल) : त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।
- (प्रेरणा) : यदि त्रिभुज एक भुजा को बढ़ाया जाय तो उस पर बनने वाला बाह्य कोण सामने वाली दो अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।

(iii) त्रिभुजः

- (प्रेरक) : दो त्रिभुज सर्वसमान होते है यदि एक त्रिभुज की दो भुजायें तथा संगत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजायें तथा संगत कोण के समान हो। (भु.को.भु. सर्वसमानता)
- (सिद्ध करना) : दो त्रिभुज सर्वसमान होते है यदि एक त्रिभुज के दो कोण तथा संगत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण तथा संगत भुजा के समान हो। (कु.भु.को) सर्वसमानता।
- (प्रेरक) : दो त्रिभुज सर्वसमान होते है यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजायें दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समान हो। (भु.भु.भु.)
- (प्रेरक) : दो समकोण त्रिभुज सर्वसमान होते है यदि एक त्रिभुज का कर्ण तथा एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण तथा भुजा के समान हो। (R.H.S.)
- (सिद्ध) : समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।
- (प्रेरक) : समान कोणों के सम्मुख भुजायें समान होती हैं।
- (प्रेरक) : त्रिभुज की असमानताएँ तथा कोण और सम्मुख भुजाओं का संबंध, त्रिभुज की असमानताएँ।

(iv) चतुर्भुज :-

- (सिद्ध) : कर्ण समानान्तर चतुर्भुज को दो सर्वसमान त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- (प्रेरक) : समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजायें समान होती है तथा विलोम।
- (प्रेरक) : समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण समान होते है तथा विलोम।
- (प्रेरक) : एक चतुर्भुज में यदि एक जोड़ी सम्मुख भुजायें समान तथा समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज बनता है।
- (प्रेरक) : समानान्तर चतुर्भुज में कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है तथा उसका विलोम।
- (प्रेरक) : एक त्रिभुज में दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समानान्तर होती है तथा उसका विलोम।

(v) क्षेत्रफल :-

- समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफलों का पुनरावलोकन।
- आयत के क्षेत्रफल को याद-करो।
- दो आकृतियों समान आधार तथा समान समानान्तर रेखाओं के बीच स्थित।
- (सिद्ध) एक ही आधार तथा समान समानान्तर रेखाओं के बीच स्थित समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल समान होते है।
- (प्रेरक) एक ही आधार तथा समान समानान्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते है।

(vi) वृत्त :-

- उदाहरणों द्वारा वृत्त की परिभाषा संबंधित विषय त्रिज्या, परिधि, व्यास, ज्या, चाप तथा घिरा हुआ कोण।
- (सिद्ध) समान ज्यायें वृत्त के केन्द्र में समान कोण बनाती है (प्रेरक) तथा उसका विलोम।
- (प्रेरक) वृत्त के केन्द्र से ज्या पर डाल गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है उसका विलोम, वह रेखा जो ज्या को समद्विभाजित करती है वह केन्द्र से लम्ब होती है।

	• (प्रेरक) तीन असंरेखीय बिन्दुओं से केवल एक ही वृत्त बनता है। • (प्रेरक) वृत्त की समान ज्यायें (या सर्वसमान वृत्त) वृत्त के केंद्र से समान दूरी पर होती है उसका विलोम। • (सिद्ध) वृत्त के चाप से केन्द्र पर बनने वाला कोण वृत्त के शेष भाग पर किसी भी बिन्दु पर बनने वाले कोण से दुगुना होता है। • (प्रेरक) वृत्त के एक खण्ड पर बनने वाले कोण समान होते हैं। • (प्रेरक) वृत्त पर दो बिन्दु जहाँ पर समान कोण बनते है को मिलाने वाली रेखा यदि उसी रेखा दूसरे दो बिन्दु स्थित हो तो वे चार बिन्दु संचक्रिय होते है। • (प्रेरक) एक चक्रिय चतुर्भुज के एक जोड़ी सम्मुख कोणों का योग 180^0 होता है उसका विलोम।
	(vii) रचनाएँः • त्रिभुज की रचना जिसमें आधार, योग/अंतर दूसरी दो भुजाओं का तथा एक आधार कोण से। • आधार के कोण तथा परिमिति से त्रिभुज की रचना। • दिये गये ज्या तथा कोणों से वृत्त खण्ड की रचना।
क्षेत्रमिती (15 hrs) (i) **धरातल के क्षेत्रफल तथा आयतन**	**(i) धरातल के क्षेत्रफल तथा आयतनः** • घन तथा घनाभों के धरातल के क्षेत्रफल तथा आयतनों की पुनरावृत्ति। • बेलन, शंकु, गोले तथा अर्धगोले के धरातलों का क्षेत्रफल। • बेलन, शंकु तथा गोले के आयतन।
सांख्यिकी तथा (15 hrs) (i) **सांख्यिकी** (ii) **प्रायिकता**	**(i) सांख्यिकी :** • सामूहिक तथा असामूहिक बारंबारिताओं की पुनरावृत्ति। • मध्यमान, मध्यिका तथा बहुलक असमूह बद्ध दतांशों से।
	(ii) प्रायिकता : • प्रयोग द्वारा प्रायिकता की अनुभूति 1 सिक्के या पासे को उछालकर अनुकुलता की धारणा। • 1से 6 उछालों की गिनती तथा तालिका।

	• सिक्के के द्वारा तुलना। उछालों के परिणामों का निरिक्षण, संभावनाओं की धारणा। • सिक्के तथा पासे के उछालो से प्राप्त अवसरों की धारणा का सामान्यीकरण तथा स्पष्टीकरण। • सिक्कें तथा पासे के बार-बार उछालों से बनने वाली बारंबारिता का दृष्य प्रस्तुतीकरण। • एक जैसे पासे तथा सिक्कों का एक साथ उछाल तथा उनसे प्राप्त परिणामों का औसत। • दोहराये गये घटनाओं से प्राप्त संख्याओं का तथा औसतों का निरिक्षण। उसकी सिक्के के दत्तांशो से तुलना तथा संभावनाओं की धारणा।
गणित में प्रमाण (5 hrs) (i) **गणित में प्रमाण**	(i) **गणित में प्रमाण :-** • गणितीय कथन तथा उनकी जाँच। • गणितीय कारण तथा निगमन कारण। • प्रमेय, स्वयंतथ्य तथा अनुमान। • गणितीय प्रमाण क्या है?

अपेक्षित दक्षताएँ

अपेक्षित दक्षताएँ स्पष्ट करता है कि क्या छात्र को क्या कर सकने में समर्थ होना चाहिए। नीचे इस आधार पर अपेक्षित दक्षताओं को नीचे वर्गीकृत कर दर्शाया जा रहा है।

समस्या समाधान

गणितीय समस्याओं को अपने विचारों और विधियों से हल कर पाना।

(a) समस्याओं के प्रकार

ये समस्याएँ एअनेक प्रकार की हो सकती हैं, जैसे- पहेली, वाक्यरूपी समस्याएँ, चित्रात्मक या आलेखीय एवं प्रदत्तों, तालिकाओं, ग्राफ आदि को पढ़ना व समझना।

(b) समस्या समाधान के सोपान

- समस्या पढ़ना व समझना
- सूचनाओं/प्रदत्तों के सभी अंशों को पहचानना
- संबंधित सूचनाओं को अलग करना
- समझना कि उसमें कौनसा गणितीय भाव है
- प्रविधियों, सूत्रों आदि को पुनःस्मरण करना
- प्रविधि का चयन करना
- उस प्रविधि का प्रयोग करते हुए समस्या हल करना
- अपने उत्तर एवं समस्या संबंधी प्रमेयों की जाँच करना

(c) जटिलता

समस्याओं की जटिलता इनपर आधारित होती है-

- संबंध जोड़ना (जैसा कि संबंधित भाग में दिया गया है)
- समस्या समाधान के सोपानों की संख्या
- समस्या समाधान में प्रयोग में आने वाली संक्रियाओं की संख्या
- समस्या समाधान के लिए बाह्य संदर्भों की आवश्यक मात्रा
- समस्या समाधान की प्रविधि का स्वरूप

तार्किक उपपत्तियाँ या सिद्ध करना

- विविध सोपानों के बीच तार्किकता (चर/अचर राशियों से संयुक्त)

- गणितीय सूत्रों व निष्कर्षों को समझते हुए संबंधित अनुमान लगाना
- प्रविधि की जाँच एवं समझना- तार्किक प्रसंगों की जाँच
- उपपत्तियों की संकल्पना समझना
- आगमन एवं निगमन संबंधी तर्क का भाव समझना
- गणितीय अनुमानों की जाँच करना

संचार (Communication)

- शाब्दिक एवं सांकेतिक गणितीय संकल्पनाओं को पढ़ना, लिखना, समझना व समझाना उदाहरण: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, कोनों का योग $= 180^0$
- गणितीय भावों का निर्माण
- गणितीय सिद्धांतों को अपने शब्दों में व्यक्त कर सकना, जैसे- एक वर्ग की चार समान भुजाएँ और चार समान कोण होते हैं।
- गणितीय प्रविधियों को व्यक्त करना, जैसे- दो अंकों वाली दो संख्याओं को जोड़ते समय पहले इकाई स्थान वाले अंक को जोड़ा जाये, फिर परिणाम के दहाई अंक (हासिल) को ध्यान में रखते हुए दहाई स्थान के अंकों को जोड़ना।
- गणितीय तर्क व्यक्त कर पाना

संबंध (Connections)

- गणितीय क्षेत्रों के संबंधित भावों में संबंध स्थापित कर सकना। उदाहरण के लिए- गुणा करते समय भाग व अनुपात में संबंध, पैटर्न और सममितता में संबंध, मापन एवं स्थान में संबंध आदि।
- गणितीय भावों को दैनिक कार्यों से सबंध स्थापित कर पाना
- गणित का अन्य विषयों से संबंध स्थापित कर पाना
- विविध गणितीय धारणाओं व क्षेत्रों में संबंध स्थापित कर पाना, जैसे- आँकड़ों का संचालन या अंक गणित और स्थल आदि में संबंध।
- विविध प्रविधियों में संबंध स्थापित कर पाना

कल्पनात्मक दर्शन एवं प्रस्तुतीकरण (Visualization & Representation)

- तालिका में दिये प्रदत्तों, संख्या रेखा, चित्रालेख, स्तंभ आलेख, 2-D आकार, 3-D आकार, चित्र आदि देखकर समझ सकना।
- तालिका, संख्या रेखा, चित्रालेख, स्तंभ आलेख, चित्र आदि बना सकना।
- गणितीय संकेतों एवं आकारों को समझना।